Digitized by the Internet Archive
in 2018 with funding from
Getty Research Institute

https://archive.org/details/delleprojezionig02tram

DELLE
PROJEZIONI GRAFICHE

E DELLE LORO PRINCIPALI APPLICAZIONI

TRATTATO TEORICO-PRATICO

AD USO

DELLA REALE SCUOLA MILITARE DEL GENIO,

E DELL' ARTIGLIERIA

COME ANCORA

DI TUTTI I GIOVANI ARCHITETTI, ED INGEGNERI CIVILI

DI GIUSEPPE TRAMONTINI

PROFESSORE DI GEOMETRIA DESCRITTIVA
NELLA R. SCUOLA SUDDETTA

PARTE II.

MODENA MDCCCXI.

PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA.

INDICE

delle cose contenute nella Parte II.

LIBRO I.

CAP. I. Della Prospettiva in generale.

Divisione della Prospettiva nelle sue parti.	Pag.	1.	2.	§ 1.	
Principj ottici della Prospettiva lineare.		2.	3.	§ 2.	
Traduzione d' ogni problema di Prospettiva lineare in termini d' astratta Geometria.		3.	5.	§ 3.	7.
Convenzioni che servono di fondamento alle pratiche ordinarie di Prospettiva.		5.	7.	§ 8.	9.
Ipotesi da cui derivano due diverse maniere di descrizioni prospettiche.		7.	9.	§ 10.	11.

CAP. II. Della Prospettiva paralella.

Consideransi le particolari circostanze di questa specie di Prospettiva.		9.	10.	§ 12.	
Metodo generale per descrivere le prospettive paralelle di quanti punti si voglia.		10.	13.	§ 13.	14.
Condizione che simplifica sommamente il metodo predetto.		13.	14.	§ 15.	
Esempj.		14.	18.	§ 16.	18.
Si ragiona sopra le prospettive paralelle di quegli oggetti che sono terminati da superficie discontinue.		18.	23.	§ 19.	20.
Sopra la maniera di sostituire al vero contorno apparente d' un oggetto una linea che si approssimi ad esso contorno, quanto può bastare in pratica.		23.	26.	§ 21.	
Osservazioni sopra alcune deformità, qualche volta inevitabili, nelle descrizioni di Prospettiva paralella.		26.	27.	§ 22.	
Pregi, e difetti delle rappresentazioni					

eseguite nell'ipotesi che i raggi visuali siano inclinati secondo un angolo semiretto col piano prospettico. Pag. 27. 28. § 23. 24.

Mostrasi come la prospettiva paralella d' un oggetto possa esprimere ogni vera dimensione di esso. 28. 31. § 25. 26.

Si parla delle prospettive paralelle che hanno ad essere descritte in superficie curve. 31. 32. § 27.

CAP. III. Della Prospettiva concorrente.

Sono considerate le condizioni particolari di questa maniera di Prospettiva. 32. 33. § 28. 29.

Principj comuni a tutti i metodi di Prospettiva concorrente. 33. 37. § 30. 37.

Metodi varj per descrivere le rappresentazioni prospettiche. 37. 49. § 38. 45.

Considerazioni sopra gli oggetti terminati da una sola superficie continua. 49. 53. § 46.

Esempj relativi ai predetti metodi. 53. 56. § 47. 49.

CAP. IV. Problemi.

Intorno alla maniera di trovare il punto di vista d' una data prospettiva. 56. 61. § 50. 51.

Sopra il modo d' inferire la vera lunghezza d' una retta obbiettiva, o l' ampiezza d' un angolo rettilineo, dalle corrispondenti prospettive. 61. 63. § 52. 53.

Sopra l' uso delle teorie precedenti per levare le distanze, e le figure inaccessibili. 63. 69. § 54. 57.

Sopra l' uso delle teorie medesime per descrivere le mappe geografiche. 69. 73. § 58. 59.

CAP. V. Sopra la collocazione più opportuna del punto di vista, e sopra certe condizioni della superficie prospettica.

Considerasi la differenza della Prospettiva naturale dalla Prospettiva artificiale, e le condizioni della menoma dissimilitudine dell' una dall' altra. 73. 77. § 60. 61.

Sono esaminate le regole dei Trattatisti intorno alla massima ampiezza da assegnare al cono ottico. 77. 84. § 62. 64.

Considerazioni intorno al caso che il punto di vista debba cader fuori del quadro. Pag. 84. 85. § 65.
Delle prospettive che hanno ad essere descritte in superficie curve. 85. 88. § 66.
CAP. VI. Delle ombre, e degli sbattimenti.
Sopra la corrispondenza che è fra la figura dell' oggetto ed il contorno della sua ombra propria. 88. 90. § 67. 68.
Fingendo i raggi della luce o paralelli fra loro, o emanati da un punto, risolvonsi alcuni quesiti sopra le superficie sferiche, e le sferoidiche. 90. 95. § 69. 72.
Esempj sopra le superficie coniche, e le cilindriche. 95. 97. § 73. 74.
Sopra qualunque superficie convessa di rotazione. 97. 99. § 75.
Esempj sopra le superficie discontinue. 99. 104. § 76. 77.
Sono considerati gli accidenti che debbono intervenire nel contorno delle ombre proprie, per la vera natural direzione de' raggi. 104. 106. § 78.
Parlasi della differenza, e della corrispondenza che hanno le ombre proprie, e gli sbattimenti, ovvero le ombre projette. 106. 107. § 79.
Esempj sopra la maniera di determinare l' ombra projetta d' un dato solido. 107. 119. § 80. 88.
Dell' ombra projetta da una superficie con una sua parte, sopra un' altra parte di se medesima. 119. 125. § 89. 92.
Analisi degli accidenti d' ombra che appariscono ne' principali membri architettonici. 125. 136. § 93. 98.
Nelle ombre projette consideransi gli accidenti prodotti da quella causa che fu indicata nel §. 78. 136. 138. § 99.
CAP. VII. Delle Penombre.
Causa della penombra; sue modificazioni dipendenti dalla rispettiva distanza, dalla grandezza, e dalla figura del corpo

raggiante, e dell' oggetto illuminato; parte che ha la penombra nel giudizio che portiamo sopra le figure degli oggetti. Pag. 138. 142: § 100. 104.
Effetti della penombra sui contorni degli sbattimenti. 142. 146. § 105. 106.
CAP. VIII. Sopra la gradazione dei lumi.
È considerata la legge delle intensità con cui procede l' illuminazione, supponendo i raggi paralelli fra loro. 146. 147. § 107. 108.
Confronto coll' ipotesi che i raggi partano da un punto matematico. 147. 149. § 109.
Effetti dell' angolo d' emanazione. Teoria che ne segue circa l' illuminazione prodotta dal sole. 149. 151. § 110.
Dipendenza che ha la gradazione del lume dalla legge con cui procede la curvatura ne' varj punti della superficie illuminata. 151. 153. § 111.
Differenza dell' illuminazione reale dall' apparente. Conclusione per rispetto alla pratica. 153. 156. § 112.

LIBRO II.

CAP. I. Norme generali per la formazione de' cunei in ogni specie di Volte. 157. 164. § 113. 120.
CAP. II. Costruzione d'una Piattabanda. 164. 167. § 121. 122.
CAP. III. Costruzione della Volta cilindrica. 168. 173. § 123. 127.
CAP. IV. Costruzione della Volta a crociera. 174. 178. § 128. 131.
CAP. V. Costruzione della Volta a spicchi. 178. 183. § 132. 135.
CAP. VI. Costruzione della Volta conica. 183. 187. § 136. 138.
CAP. VII. Costruzione della Volta emisferica. 187. 193. § 139. 141.
CAP. VIII. Costruzione della Volta a cupola. 194. 197. § 142. 143.
CAP. IX. Costruzione della Volta anulare. 197. 208. § 144. 148.
CAP. X. Costruzione della Volta a chiocciola. 208. 214. § 149. 152.

CORREZIONI DA FARSI NELLA PARTE II.

Pag.	Lin.	Errori	Correzioni.
11	8	prospettiva *b*	prospettiva *b'*
24	3	αKL	*a*KL
25	5	αKL	*a*KL
39	12	la rette	le rette
42	8	diriggere	dirigere
47	35	§ 44	§ 42
49	32	e sia *o*	e sia O
56	31	cognita	cognite
77	7	ottenda	sottenda
ivi	10	della quale difficil cosa	della quale, difficil cosa
84	6	tali altri	tali altre
106	31	cioè dalle	cioè delle
115	19	104	014
120	25	*sopprimasi la parola* almen	
127	29	$\beta' \pi'$	$\beta \pi'$
131	2	$\beta' \mu' \theta$	$\beta' \mu \theta$
132	29	concava	convessa
171	33	54'	*s* 4'
175	25	AB	AF
203	33	III V L	II IV L
210	18	Fig. 79	Fig. 79.
ivi	19	i due	I due

PARTE II.

LIBRO I.

CAP. I.

Della Prospettiva in generale.

§. 1. Chiamasi *Prospettiva* e la scienza delle apparenze, secondo le quali gli oggetti sono visibili, e l'arte d'imitare quelle apparenze, descrivendone le immagini con regole certe e geometriche sopra una data superficie.

Due sono le qualità da doversi considerare nell'immagine; cioè prima la sua figura; poi l'imitazione degli accidenti che la luce, o diretta, o riflessa, cagiona sopra l'oggetto cui vogliamo rappresentare. Quindi proviene la distinzione di *Prospettiva lineare*, la quale risguarda la descrizione delle figure, e di *Prospettiva aerea*, cui spetta la determinazione delle ombre; la loro digradazione; quella dei lumi, e l'applicazione dei colori; per le quali cose apparir si fa nella figura dell'immagine la presenza dell'oggetto reale ad essa corrispondente.

Questa seconda parte della prospettiva, siccome quella che in certi punti, e specialmente in ciò che risguarda i colori, dipende da leggi fisiche sommamente complicate, nè in tutto note, non può essere compiutamente ridotta a regole geometriche. Ma qualunque problema che spetti alla prima

parte, cioè alla prospettiva lineare, si traduce sempre esattamente in puri termini di astratta geometria. Questa ragione, e la naturale dipendenza che fra loro hanno le due parti suddette, vogliono che s' incominci dalla prospettiva lineare.

§. 2. È principio universalmente ricevuto, che da ogni punto assegnabile nella parte veduta di un oggetto, si diffonda, come da un centro, la luce in raggi rettilinei per ogni verso. Una parte di essi, incontrando la pupilla dello spettatore, costituiscono un cono, che ha la sua base nella pupilla stessa, ed il vertice nel punto obbiettivo.

Questi raggi prodotti nell' interno dell' occhio, per le refrazioni che soffrono attraversando i tre umori, si conformano in un' altra figura, che somiglia prossimamente ad un cono, posto sulla medesima base, contrario al primo, cioè col vertice nel fondo dell' occhio sulla membrana detta *retina*.

Da tutti i punti apparenti dell' oggetto partono dunque altrettanti coni luminosi, i quali hanno per base comune la pupilla; e sopra di essa formasi un sistema di altrettanti coni contrarj ai primi, che dispongono sulla retina i loro vertici con quel medesimo ordine relativo, col quale sono disposti nella superficie dell' oggetto i punti apparenti. Lo spazio occupato nella retina dai vertici degli accennati coni interni è la figura dell' immagine, che si dipinge su la retina stessa.

Benchè non sia rigorosamente vero; ciò nulla ostante, per l' uso che far dobbiamo di queste nozioni, è lecito supporre che i due coni, uno interno, e l' altro esterno, formati dai raggi che partono da un dato punto obbiettivo, abbiano i loro assi in quella retta che unisce i due vertici, cioè il punto obbiettivo, e la sua immagine sulla retina. Ammessa tale ipotesi, la retta in cui giacciono gli assi passerà pel centro della base comune, cioè della pupilla. Ciò posto, se in vece di ciascun cono spettante a ciascun punto obbiettivo, noi consideriamo soltanto quel raggio che è nel-

l'asse del cono medesimo, il complesso di tutti gli assi occuperà uno spazio di forma piramidale, o conica, che avrà la sua base nella superficie dell'oggetto, ed il vertice nel centro della pupilla.

Concepiamo prodotta nell'interno dell'occhio quella figura piramidale, o conica, cui designeremo col nome di *piramide*, o di *cono visuale*. Il luogo, ove accaderà la sua intersecazione con la retina, sarà quel medesimo spazio occupato già dall'immagine superiormente definita; e per conseguenza la figura di essa potrà essere considerata geometricamente come l'intersecazione che nasce fra la superficie della retina, e la piramide, o il cono visuale, prolungato nell'interno dell'occhio.

§. 3. Immaginiamo ora che sia posta fra l'oggetto e l'occhio una superficie, la quale non impedisca il corso de' raggi visuali; e concepiamo l'intersecazione della piramide, e del cono visuale con la detta superficie. I punti, ove essa è incontrata dai raggi, saranno tutti contenuti nella menzionata sezione, e disposti in essa con quel medesimo ordine relativo che hanno i punti dell'oggetto, dai quali partono i raggi stessi componenti la piramide, o il cono. Ora fingiamo tolto l'oggetto, e tuttavia rimanga al suo luogo il tronco della piramide interposto fra l'occhio, e la superficie secante. La sensazione che proverà lo spettatore dovrà sussistere come prima; essendo indifferente che i raggi partano dall'oggetto, o dalla superficie secante, purchè arrivino all'occhio collo stesso ordine e colore, e con la forza di prima.

Cotesta finzione ideale è appunto ciò che l'artista intende di avverare coi mezzi somministrati dalla prospettiva. Ed è chiaro che a conseguire l'intento fa mestieri determinare l'accennata intersecazione, la quale costituirà la figura dell'immagine; indi modificare quella figura in guisa che da tutti i suoi punti pervengano i raggi di luce all'occhio come verrebbero dall'oggetto reale, se fosse presente.

Adunque, per ciò che spetta alla figura dell' immagine, si concluda che *può sempre essere considerata come l' intersecazione di una data superficie con una data piramide, o con un dato cono*.

§. 4. Ciò che abbiam detto nella supposizione della superficie secante posta fra l' oggetto e l' occhio, conviene manifestamente ancora se l' oggetto giaccia tra l' occhio e quella superficie.

§. 5. La piramide visuale è determinata dalla posizione del suo vertice, che è il centro della pupilla, e dalla parte veduta dell' oggetto, la quale costituisce la base della stessa piramide §. 2. Cotesta base è sempre una superficie, perchè gli oggetti che noi possiamo vedere son tutti solidi; ed in tanto li veggiamo, in quanto che dalla superficie loro o diffondono luce propria, o riflettono luce aliena. Qualunque sia la figura dell' oggetto presente alla vista, non potrà mai da tutti i punti della sua superficie pervenire la luce all' occhio dello spettatore; ma mentre una parte della superficie manda raggi all' occhio, impedisce che i raggi emanati dalla parte rimanente possano direttamente pervenire ad esso.

V' ha dunque un termine che separa la prima dalla seconda parte; e quel termine dev' essere necessariamente un contorno lineare, il quale chiamasi *contorno apparente*, e costituisce la base, o la direttrice della superficie la quale contiene la piramide, o il cono visuale §. 2.

Varia il *contorno apparente* nel medesimo oggetto, secondo la diversa posizione di esso rispetto all' occhio dello spettatore. Fingiamo per esempio un cubo, e l' occhio sia collocato nel prolungamento d' una diagonale. Vedremo tre faccie; e perciò il contorno apparente sarà un poligono formato da sei lati del cubo. Ma se ponghiamo l' occhio in una retta normale ad una faccia, quella sola sarà veduta, ed il suo perimetro sarà il contorno apparente. Se l' oggetto sia una sfera, avremo il contorno apparente sempre in

un circolo; ma questo differirà più, o meno da un circolo massimo, secondo che minore, o maggiore sarà la distanza dell' occhio dal centro della sfera. In generale il contorno apparente d'un poliedro sarà un poligono formato da certi lati del solido stesso. E se l' oggetto sia terminato da una superficie unica e continua, il contorno apparente sarà la linea di contatto fra la superficie dell' oggetto, ed una superficie conica, la quale lo involga e tocchi, §. 38, P. I, avendo il suo vertice nel punto ove è collocato l' occhio.

Ciò posto, la piramide, o il cono visuale si determina dalla posizione dell' occhio, e dal contorno apparente; questo poi si troverà col metodo del §. ora citato.

§. 7. Sebbene in natura non esistano nè linee, nè superficie, nè punti, separati da solidi, ciò nulla ostante giova in prospettiva, come in geometria pura, considerare cotesti termini astratti come oggetti reali e da se esistenti; si determinan le loro immagini separatamente, e si arriva in tal modo a compiere la descrizione delle immagini rappresentanti oggetti solidi e reali, come è il vero fine della prospettiva.

Se dunque sia proposta per oggetto una linea, è facile intendere che la piramide, o il cono visuale, degénera in una superficie; e questa sarà piana quando la linea obbiettiva sia retta, o ancora se, essendo curva, giaccia in un piano che passi per l' occhio. Che se l' oggetto sia un punto, non avremo più nè piramide, nè superficie visuale; ma una semplice retta rappresentante il raggio visuale che unisce l' occhio ed il punto obbiettivo.

§. 8. Fino ad ora non abbiamo considerato che la superficie secante la piramide, o il cono visuale, §. 3, sia d'una tal data specie; ma in seguito la supporremo piana; e secondo l' uso, sarà designata col nome di *quadro*, *o parete*.

La sua posizione s' intende verticale ogni qual volta non abbiavi espresso avviso che debba esser posta altrimenti.

Un piano orizzontale intendasi condotto a segare il qua-

dro, e si chiami *piano geometrico*. Sopra di esso suol essere descritta l' icnografia dell' oggetto.

Linea fondamentale è la retta in cui si tagliano il piano geometrico, ed il quadro.

Punto di vista è quello dove trovasi collocato l' occhio dello spettatore.

Punto principale, o *centro del quadro* è la projezione retta sul quadro stesso del punto di vista.

Punto della stazione è la projezione retta del punto di vista sul piano geometrico.

Raggio principale è la retta che unisce il punto di vista con la sua projezione sul quadro, cioè col punto principale.

Un piano che dal punto di vista sia condotto perpendicolare alla linea fondamentale, è denominato *piano verticale*; e col nome di *linea verticale* vien designata l' intersecazione del piano verticale col quadro.

È chiaro che il quadro, il piano geometrico, ed il piano verticale, sono coordinati fra loro come i piani denominati I°, II°, e III°, P. I.

§. 9. Quando la posizione d'un punto obbiettivo è data, sarà pur nota la sua distanza dal quadro, dal piano geometrico, e dal piano verticale. La prima conserva il nome di *distanza*; alla seconda è attribuito il nome di *altezza*; denoteremo la terza con quello di *declinazione*.

Ciascheduna delle dette misure si può intendere o da una parte, o dalla parte opposta del piano al quale è riferita §§. 1, 2. P. I. Per evitare l' ambiguità, chiameremo positive le distanze dal quadro misurate dalla parte opposta a quella ove è collocato l' occhio, e negative quelle che sono misurate dalla parte medesima dell' occhio. Così positive, o negative chiameremo le altezze, e le declinazioni; le prime secondo che saranno misurate dalla parte superiore, o inferiore, rispetto al piano geometrico; le altre secondo che saranno verso la destra, o la sinistra dello spettatore, rispetto al piano verticale.

Con la medesima regola denomineremo *altezze*, e *declinazioni apparenti*, positive, o negative, le distanze che hanno, rispettivamente, dal piano geometrico, e dal piano verticale, le prospettive dei dati punti obbiettivi. Ed è chiaro che essendo queste nel quadro, le loro distanze dal piano geometrico sono quelle medesime che hanno dalla linea fondamentale, e le distanze dal piano verticale sono quelle che hanno dalla linea verticale.

Per conseguenza la declinazione vera di un punto obbiettivo, e la sua declinazione apparente, o saranno ambedue insieme positive, o ambe insieme negative. Ma all' altezza negativa di un dato punto potrebbe corrispondere l'altezza apparente positiva, stando l' occhio superiormente rispetto al piano geometrico; o per l'opposto, all' altezza vera positiva potrebbe corrispondere l' altezza apparente negativa, quando l'occhio fosse al di sotto del piano sopraddetto.

Volendo evitare tal discrepanza, si assuma il piano geometrico che passi pel punto di vista. Allora la linea fondamentale coinciderà con la orizzontale, ed il centro del quadro sarà il punto comune ad esso, al piano geometrico, ed al piano verticale, che sono i tre piani coordinati, §. 8, ai quali intendiamo riferiti i punti dell' oggetto. In tal maniera costituiti questi tre piani, ancora l' altezza vera e l' apparente di un dato punto saranno sempre o insieme positive, o insieme negative.

§. 10. Le immagini descritte nella supposizione che i raggi visuali, concorrendo in un punto, formino una figura piramidale, o conica, imitano a meraviglia le apparenze, secondo le quali siamo accostumati a giudicare coll' occhio le figure, e le rispettive posizioni degli oggetti; e perciò soddisfanno alla vista, e recano grandissimo diletto, singolarmente quando sono compiute da ben ragionata dipintura. Ma la ragione che v' ha fra le dimensioni apparenti nell'immagine, differisce di gran lunga da quella che hanno le corrispondenti dimensioni vere nell' oggetto. Ove dunque il fine prin-

cipale delle descrizioni sia di mostrare, con la massima facilità ed esattezza, la ragione vera che hanno fra loro le dimensioni dell' oggetto, come occorre ad ogni momento nella pratica delle arti, quella maniera di rappresentazione non può essere opportuna.

Mossi da queste considerazioni, gli artisti convennero di esprimere d' ordinario i loro concetti per mezzo di *icnografie*, e di *ortografie* descritte in superficie piane, le quali si chiamano ancora *piante*, ed *elevazioni;* nè altro sono propriamente che projezioni rette, le prime sopra un piano orizzontale, e le seconde sopra un piano verticale. Aggiuntovi, come s' usa, il conveniente chiaro-scuro, meglio servono all' intento, dimostrando le figure e le dimensioni vere delle cose proposte. Ma per conciliare talvolta l' eleganza della prospettiva, propriamente detta, colla dimostrazione esatta delle vere dimensioni che aver debbono gli oggetti rappresentati, immaginarono un artificio che partecipa dell' una e dell' altra specie di descrizioni, derivando dall' ipotesi che la piramide, o il cono visuale si trasformi in prisma, o in cilindro, perchè i raggi diventino paralelli fra loro; e sol tanto inclinati secondo certe condizioni rispetto al piano geometrico, ed al quadro.

§. 11. Poichè dall' uso è confirmato il nome di *prospettiva* anche alla descrizione che rappresenta un qualche oggetto, seguiremo la consuetudine, qualunque volta tornerà comodo, senza pregiudizio della chiarezza. Ma, per distinguere i varii metodi di delineazione, chiameremo *prospettiva concorrente*, o solamente *prospettiva*, quella prima specie, ove i raggi sono tutti concorrenti nel punto di vista. Distingueremo col nome di *prospettiva paralella* cotesta seconda specie, la quale in vero altro non è se non una modificazione particolare, e convenzionale della prima; cioè, se in quella supponghiamo una distanza determinata e finita del vertice dalla base della piramide, o del cono visuale, in questa si ammette essere infinita la detta distanza. I risulta-

tati di tale ipotesi non differiscono dalle projezioni rette, se non in quanto, per ottener queste, i raggi debbono essere non solamente fra loro paralelli, ma ancora normali al piano di projezione che fa l' ufficio di quadro. Da ciò si vede che la dottrina delle projezioni, della quale abbiamo già trattato, appartiene per sua natura alla prospettiva; e conosceremo in seguito dall' uso che si fa di quella dottrina, come essa costituisca l' essenziale elemento della prospettiva medesima.

Quella estensione ch' ebbe dai moderni la teoria delle projezioni, e l' applicazione de' suoi metodi ancora ad argomenti di pura geometria, non che alla pratica di molte arti, richiedevano un trattato separato dalla prospettiva propriamente detta; ed in ciò seguitai l' autorevole esempio di Monge, e di La Croix, i quali risguardarono cotesto ramo come compimento alle istituzioni di geometria astratta.

CAPITOLO II.

Della prospettiva paralella.

§. 12. Ciò che possiamo dire intorno all' intersecazione di una data superficie con una data piramide, e con un dato cono, agevolmente si trasferisce al caso ove l' una convertasi in prisma, e l'altro in cilindro.

Potrebbe dunque sembrar superfluo considerare separatamente questo caso. Ma trattandosi di cose le quali debbono essere non solamente intese in astratto, ma ancora con facilità e prontezza praticate, reputo utilmente speso il tempo in ragionarne a parte a parte, e con certa minutezza.

Posto che i raggi, i quali portano l'immagine sul quadro, siano paralelli fra loro, indefinita è la posizione del punto di vista; e perciò sarà pure indefinita sul quadro la posizione del punto principale, come ancora quella della linea orizzontale, e della verticale. Adunque per le costruzioni di prospet-

tiva paralella, potremo assegnare ad arbitrio la linea verti-
Fig. 1 cale Y O V, che sia perpendicolare alla data fondamentale X Z, e potremo riferire le declinazioni apparenti alla prima, come le altezze apparenti alla seconda; non altrimenti che, rappresentandosi il quadro nel piano XYVZ; il piano geometrico nella retta X Z; il piano verticale nella YOV, a questi piani si riferiscono, rispettivamente, le distanze, le altezze, le declinazioni vere dei punti obbiettivi, §. 9. Ma perchè non sia di bisogno notare quali punti dell' oggetto si trovino da una parte, e quali da un' altra del piano geometrico; e quindi quali prospettive debbano cadere di sopra, e quali di sotto alla linea fondamentale, fingeremo il piano geometrico posto in guisa che tutti i punti obbiettivi abbiano le altezze positive, cioè siano superiori per rispetto a quel piano. Che se in alcune particolari circostanze sarà posto altrimenti, il modo di applicare alla costruzione i debiti cangiamenti si manifesterà da se medesimo, dopo le cose che di mano in mano andremo dichiarando.

§. 13. Fingiamo che il piano geometrico, rappresentato dalla fondamentale X Z, venga ad applicarsi sul piano X Y Z V, che rappresenta il quadro; come abbiamo finto, §. 2, P. I, che il piano II° si adatti al piano I°.

Seguitando quell' ipotesi, la retta O V rappresenterà l' intersecazione del piano geometrico col piano verticale; la O Y rappresenterà la linea verticale; O il punto comune ai tre piani coordinati, §. 8.

Se dunque sarà dato un oggetto di posizione e di forma, data sarà la *distanza*, e la *declinazione* d'ogni suo punto; del quale si potrà descrivere l' icnografia sul piano geometrico. Data pur sarà l' *altezza* di ciascun punto; e perciò potremo descrivere la sua ortografia sul quadro, §. 1, P. I.

Siano per tanto A — *a* le projezioni di un punto obbiettivo; R S — *r s* quelle d' una retta paralella alla direzione de' raggi visuali; e si dimandi la prospettiva di quel punto secondo questi dati.

È manifesto che la prospettiva dimandata, dovendo essere nel punto d' incontro del raggio visuale col quadro, si determinerà per la costruzione del §. 11, P. I; cioè condotta per A una paralella A A' alla R S, e per *a* una paralella *a a'* alla *r s*; elevata in oltre per A' la normale A' *a'*, nel punto *a'* della sua intersecazione con la *a a'* sarà la prospettiva del punto proposto.

Nel modo stesso potremo determinare la prospettiva *b* d' un altro punto dato per le projezioni B — *b*; e così diremo di quanti altri punti si voglia.

Ma perchè sommamente importa nelle descrizioni l'economia delle linee semplicemente sussidiarie, le quali più non debbono apparire quando il disegno è compiuto, gioverà evitare la descrizione di esse per quanto comporta l' ordine e la facilità dell' operazione. A questo fine indicheremo la maniera di descrivere sul quadro le prospettive dei punti dati, riferendole alle rette X Z, O Y V.

Prima di venire alla costruzione osserviamo, che se pei punti *a'*, *b'* siano condotte nel quadro le rette *a' p*, *b' q* paralelle alla X Z; e l' una incontri in *p* la A *a*, l' altra in *q* la B *b*, la parte *p a* denoterà la differenza fra l' altezza vera e l' altezza apparente del punto dato per le projezioni A — *a*; così la parte *b q* denoterà la differenza fra l' altezza vera, e l' altezza apparente del punto dato per le projezioni B — *b*. I triangoli *a a' p*, *b b' q* essendo simili, sono proporzionali le due *a p*, *b q* alle due *a'p*, *b'q*, le quali ordinatamente eguagliano le due *m* A', *n* B'. Ma la *m* A' è la differenza fra la declinazione vera, e la declinazione apparente del primo punto projettato in A — *a*; e la *n* B' è similmente la differenza fra la declinazione vera, e la declinazione apparente del secondo punto projettato in B — *b*. Inoltre le *m* A', *n* B' sono proporzionali alle A *m*, B *n*, cioè alle distanze dei punti obbiettivi dal quadro. Adunque *tanto le differenze fra le altezze vere e le apparenti, quanto le differenze fra le declinazioni vere e le apparenti, procedono con*

la medesima proporzione che hanno fra loro le distanze.

Ciò premesso, espongasi una retta K L, sopra la quale porteremo la data misura A m da K in α; e condotta per α una normale alla K L, ponghiamo la α I eguale alla $p\,a$, e dall'altra parte la α 1 eguale alla m A'. Conduciamo in oltre le rette indefinite K 1, K I; indi portiamo sopra la detta K L la misura B n da K in β, e per β si conduca una paralella alla 1I, che incontri in II la KI, ed in 2 la K1. Sarà evidentemente β2 eguale ad nB', e βII eguale a bq. Avremo dunque in tal modo la lunghezza che dev'essere aggiunta alla declinazione vera O n per aver l'apparente O B'; e parimenti avremo la lunghezza da togliere all'altezza vera $n\,b$ per ottener l'apparente $n\,q$.

Rappresentiamo ora in ZY'X'V' il quadro senz'altre linee, fuorchè le due X' Z, Y' V'; e si prenda con un compasso la misura della declinazione apparente OB'; con un altro compasso prendasi la misura dell'altezza apparente nq. Si ponga O' B'' eguale alla prima, ed O' q' eguale alla seconda delle due predette misure; indi, ferma una punta del primo compasso in q', ed una punta del secondo in B'', si potranno condurre le due punte rimanenti a coincidere in un medesimo punto b'', che rappresenterà la prospettiva del punto dato per le projezioni B — b.

Laonde, senza ingombrare il quadro X' V' Z Y' con altre linee, descriveremo soltanto un piccolo archetto con la punta mobile di ciascun compasso, nell'angolo X' O' Y', ove le circostanze del problema indicheranno che dev'essere la prospettiva cercata; e questa sarà determinata nell'intersecazione dei due archi.

§. 14. Se l'altezza apparente debba essere maggiore, o minore della vera che ad essa corrisponde; cioè, se le differenze αI, βII ec. debban essere aggiunte, o tolte alle altezze vere per ottener le apparenti, ciò sarà indicato dalla posizione della $a\,a'$ relativamente alla $p\,a'$, quando non esprimasi l'una o l'altra condizione nell'enunciato.

Imperciocchè se in vece della *a a'* fosse data la *a a''*, questa circostanza denoterebbe che le altezze apparenti esser debbono maggiori delle vere ad esse correlative. Così se in vece della projezione R S fosse data la R S', ciò mostrerebbe che dalla vera declinazione di un punto obbiettivo si deve togliere la sua differenza dalla apparente, per ottenere quest' ultima. Eseguite le detrazioni che son necessarie, se riesce positiva tanto l' altezza apparente, quanto la declinazione apparente, la prospettiva cade nell' angolo Y' O' X': se ambedue quelle dimensioni riescono negative, la prospettiva cade nell' angolo opposto Z O' V': se l' altezza essendo negativa, è positiva la declinazione, cade la prospettiva nell' angolo X' O' V': se poi l' altezza essendo positiva, la declinazione riesca negativa, la prospettiva cade nell' angolo opposto Z O' Y'.

In questa maniera intendo che le circostanze particolari d' ogni problema diano a conoscere in quale dei quattro angoli, formati in O' dalle X'Z, Y'V', debbasi trovare la prospettiva cercata.

Questi criterii sono abbastanza chiari, perchè niuno, dopo aver intese le cose dichiarate di sopra, possa mai trovarsi in ambiguità.

§. 15. Per non vincolare il problema precedente, fu supposto di qualunque grandezza l' angolo A A' *m*; ma d' ordinario, nelle costruzioni di prospettiva paralella, quell' angolo si pone retto. Ciò posto, non è mestieri determinare le differenze fra le declinazioni vere, e le apparenti. In oltre più manifesta è la corrispondenza delle descritte prospettive con le icnografie dei medesimi punti in esse rappresentati; atteso che una medesima retta perpendicolare alla fondamentale congiunge la projezione retta d'un punto, descritta sul piano geometrico, e la prospettiva del punto medesimo descritta sul quadro.

A questi vantaggi si aggiugne un altro grandissimo, che consiste nell' evitare quelle esagerazioni, le quali deformano

l' immagine, quando è costrutta nell' ipotesi che il detto angolo A A' *m* differisca dal retto.

§. 16. Per applicare ad un esempio il metodo ora accennato, prendiamo a descrivere la prospettiva paralella d' un tetraedro.

Fig. 2 La sua projezione retta sul piano geometrico sia rappresentata nel triangolo A B C, che sarà pure sua base. Siano D – *d'* projezioni del vertice; l'angolo *b* K 2 sia quello ch'esprime l'inclinazione de' raggi visuali col piano geometrico; e dichiarisi in oltre se alle altezze vere debbano essere aggiunte, o tolte le loro differenze dalle apparenti.

Conducansi le AI, BII, CIII normali sopra la X Z; ed ordinatamente eguali ad esse ponghiamo le K *a*, K *b*, K *c*. Dai punti *a*, *b*, *c* innalziamo le *a*1, *b*2, *c*3, perpendicolari alla K*b*, e terminate ne' rispettivi punti d'incontro 1,2,3 con la K 2.

Saranno le *a*1, *b*2, *c*3 quelle differenze, che suppongo dover essere aggiunte alle relative altezze vere, per ottenere le altezze apparenti.

Ora, perchè son nulle le altezze vere dei punti A,B,C, essendo essi nel piano geometrico, prolunghiamo la AI in α, facendo la I α eguale alla *a*1; e sarà α la prospettiva di A. Così prolungata la BII in β, finchè sia la II β eguale alla *b*2; e parimenti la C III in γ, finchè sia la III γ eguale alla *c*3, saranno β, γ le prospettive dei punti B, C.

In oltre conduciamo la retta D *d'* che tagli in I V la X Z. Alla IV D posta eguale la K *d*, s' innalzi per *d* la perpendicolare *d*4, terminata in 4 nella K2. Sarà *d*4 quell'aggiunta che dobbiam fare all' altezza vera *d'* IV per ottener l' apparente δ IV, onde δ sia prospettiva del vertice.

Rimane dunque che si congiungano le rette $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ perchè sia compiuta la prospettiva richiesta.

§. 17. Propongo un altro esempio, e fingo di dover descrivere la prospettiva d' un Abaco.

Nel quadrato ABCD sia la sua projezione sul piano geometrico; e per aver comode le misure delle altezze vere, pongo in vece della projezione retta sul quadro, il profilo *m n*. Fig. 3

Sia DK3 l'angolo d' inclinazione dei raggi, e le differenze delle altezze apparenti dalle vere debbansi togliere da queste ultime.

È manifesto che quattro punti projettati in A, B, C, D, avranno tutti la medesima altezza, se i due quadrati, superiore, ed inferiore, dai quali è terminato l' abaco, si pongano coi loro piani paralelli al piano geometrico; e la misura di quell'altezza sarà la distanza del punto *m* dalla fondamentale XZ, cioè la *k* O. Così quattro punti projettati in A', B', C', D' avranno tutti la medesima altezza, eguale alla distanza del punto *n* dalla X Z; e similmente dal profilo *m n* dedurremo le altezze degli altri punti egualmente distanti dal piano geometrico.

Conduciamo paralelle alla X Z le A*a* 1, B*b* 2, D*d* 3, per determinare le differenze *a* 1, *b* 2, *d* 3 da togliere alle rispettive altezze vere, onde aver le altezze apparenti dei punti projettati in A, B, D.

Tolta dunque la misura *a* 1 dall' altezza vera O*k*, si avrà l' altezza apparente del punto projettato in A; e quindi la sua prospettiva α.

Da quella medesima altezza O*k* tolta la misura *b* 2, resterà l' altezza apparente del punto projettato in B; e quindi troveremo la sua prospettiva β. Similmente otterremo la prospettiva δ del punto projettato in D. Laonde le due rette $\alpha\beta$, $\alpha\delta$ saranno prospettive delle due projettate in A B, A D.

Se dall' altezza O*l* sottraggasi la misura α' 4, rimarrà l' altezza apparente del punto projettato in A'; e quindi avremo la sua prospettiva α'.

Proseguendo nella maniera medesima, potremo determinare le prospettive di tutti gli altri punti, projettati in B', D', C', in E, F, G, H; e così dicasi dei rimanenti.

Ma l' operazione potrà essere accorciata non poco osservando le seguenti circostanze.

1.° In questa maniera di descrizioni, le prospettive di quelle rette obbiettive che sono paralelle, ed eguali fra loro, sono anch' esse fra loro paralelle ed eguali; dunque le prospettive di quegli spigoli che sono fra loro paralelli, saranno rette fra loro paralelle.

2.° Le prospettive di quelle rette obbiettive che sono paralelle al quadro, sono eguali e paralelle alle corrispondenti obbiettive medesime; dunque gli spigoli verticali avranno le prospettive loro parimente verticali, ed eguali ad essi.

Ciò posto, dal punto α' siano condotte le rette $\alpha'\beta'$, $\alpha'\delta'$, una paralella alla $\alpha\beta$, l' altra alla $\alpha\delta$. Nella prima sarà la prospettiva dello spigolo projettato in A' B', e nella seconda sarà la prospettiva dello spigolo projettato in A' D'. Adunque dai punti B', D' conducendo due rette normali alla XZ, delle quali una vada a segare in β' la $\alpha'\beta'$, l' altra in δ' la $\alpha'\delta'$, sarà β' la prospettiva del punto projettato in B', e δ' sarà prospettiva del punto projettato in D'.

In conseguenza dei medesimi principj, basterà condurre per β' una retta $\beta'\gamma'$ paralella alla $\alpha'\delta'$, e per δ' una retta $\delta'\gamma'$ paralella alla $\alpha'\beta'$, onde si formi il paralellogrammo $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, che sarà prospettiva del quadrato inferiore, terminante l' abaco proposto.

Dal punto α' producasi la retta A' α' sì che il prolungamento $\alpha'\alpha''$ eguagli la misura lp. Sarà α'' prospettiva di quel punto che è projettato in A' ed ha l' altezza p O.

Adunque conduciamo per α'' la retta $\alpha''\beta''$ paralella ed eguale alla $\alpha'\beta'$, e la retta $\alpha''\delta''$ paralella ed eguale alla $\alpha'\delta'$. Congiunte le $\beta'\beta''$, $\delta'\delta''$, sarà terminata la prospettiva del paralellepipedo, che costituisce propriamente l' abaco, nè resterà più che a terminare la prospettiva del suo cimazio.

Per quanto spetta al listello, termineremo la sua prospettiva come abbiamo testè compiuta quella dell' abaco; cioè faremo le $\alpha\alpha'''$, $\beta\beta'''$, $\delta\delta'''$ eguali fra loro, ed alla misu-

ra

ra K q . Le rette $\alpha'''\delta'''$, $\alpha'''\beta'''$ saranno le prospettive corrispondenti ai due spigoli projettati nelle rette A D , A B , i quali hanno l' altezza O q . Le prospettive occulte dei due spigoli analoghi , projettati nelle due rette BC , CD, si determinerebbero come abbiamo determinate le due $\beta'\gamma'$, $\delta'\gamma'$.

Rimane la prospettiva della gola, la quale è chiaro che sarà tosto terminata , quando avremo trovate le prospettive ε , ε' dei punti projettati in E , E', come evidentemente mostra la figura .

Dalle cose che minutamente abbiamo ora spiegate , si rende manifesto , che descritta la prospettiva della sezione piana , la quale è projettata in A E E' A' , cioè descritto il contorno $\alpha\alpha'''\varepsilon\varepsilon'\alpha''\alpha'$, e le due $\alpha\delta$, $\alpha\beta$, tutte le altre parti della prospettiva cercata si derivano agevolmente , tanto se vogliamo procedere per costruzione rigorosa , quanto se basti una certa approssimazione a giudicio dell' occhio .

§. 18 . Si rappresenta come anteriore la parte D A B , fingendo lo spettatore al di là del quadro, §. 3 , e l'oggetto al di quà . Ma l'immagine riesce rovesciata; perciocchè nella detta ipotesi lo spettatore vedrebbe alla sua destra il punto δ, mentre nella nostra descrizione quel punto si trova a sinistra di chi la guarda . Cotesto rovesciamento non porta pregiudizio alcuno , nè alterazione alla figura dell' immagine ; ma solo alla sua posizione . Volendo operare in modo che le prospettive dei punti che sono alla parte destra dello spettatore si trovino anch' esse da quella parte medesima , basterà descrivere una retta X'Z' paralella alla XZ, al di sotto della detta projezione A B C D; e rappresentando in quella retta l' intersecazione del quadro col piano geometrico , riferire ad essa le distanze , come se lo spettatore fosse al di quà della stessa X' Z', e l' oggetto al di là .

La figura che otterremo , sarà simile alla precedente , ma posta in diverso modo ; perciocchè il punto γ' diverrà superiore , ed inferiore il punto α' ; e similmente saranno permutate le posizioni degli altri punti .

Se nelle pratiche ordinarie non si adotta la distinzione delle due linee X Z, X' Z', riferendo alla prima le altezze, ed alla seconda le distanze, quest' uso non ha altro fine che di rendere più semplici e spedite le operazioni.

§. 19. Le regole spiegate fino ad ora somministrano il modo di descrivere la prospettiva paralella di qualunque figura piana, terminata da rette linee, e di qualunque solido terminato da faccie piane, ed ancora da faccie curve, come la gola del cimazio nel §. precedente; purchè siano determinati ed espressi gli spigoli che le faccie formano nelle loro congiunzioni.

Nè di ulteriori teorie sembran credere che sia mestieri tutti gli autori a me noti, i quali trattano della prospettiva: ciò che è vero in astratto; ma l' uso pratico di questo principio non è si facile che possano comodamente pervenirvi i principianti colle proprie riflessioni; ed assai pochi sono gli artisti i quali ne posseggano un' idea nitida ed adequata.

Se sarà dimandata la prospettiva d' una data linea curva, possiamo assegnare in essa alcuni punti e descrivere le loro prospettive; per le quali facendo poi passare una linea continua, questa sarà, o potrà essere considerata come prospettiva della linea proposta. In modo analogo si potrà descrivere la prospettiva d'una superficie curva, o d'un solido da essa terminato. Imperciocchè supponghiamo inscritto in essa un poliedro d' un numero indefinito di lati, e descritte le prospettive di tutti i punti ne'quali si formano gli angoli solidi, per alcune di quelle prospettive conducendo una linea continua, la quale racchiuda tutte le altre, questa conterrà la prospettiva d'una superficie circoscritta al poliedro; e perciò sarà da essa determinata la prospettiva della superficie proposta.

Fig. 4 Fingiamo che A, B, C, A', B', C', D' siano le prospettive dei punti accennati. È chiaro che se fosse dimandata la prospettiva del poliedro, descrivendo i lati BC, CD, DD', D'C', C'B', B'B, viene a formarsi un poligono che contiene le

rimanenti prospettive A, A'; e perciò racchiude la prospettiva richiesta. Ma se i punti obbiettivi, corrispondenti alle prospettive B, B', C', D', D, C, non sono nel contorno apparente, §. 5, della data superficie curva, non si può dire che una linea continua condotta per tutte quelle prospettive sia il contorno dell'immagine che si dimanda. Egli è vero che moltiplicando indefinitamente le faccie del poliedro, sempre più esso accostasi colla propria superficie a quella che lo circoscrive; ed in conseguenza otterremo, per la costruzione sopra indicata, un contorno sempre più vicino a quello che deve avere l'immagine; ma quanto sia laboriosa ed incerta cotal maniera di cercarlo, quasi a tentone, non è bisogno ch'io lo dimostri.

Il disegnatore intelligente ricorrerà, in simili casi, alla determinazione del contorno coll' artificio che fu insegnato, §. 88, P. I, profittando di tutti i soccorsi, e degli accorciamenti che può somministrare la cognizione della geometria. Questa è necessaria per iscegliere i mezzi della costruzione, e per condurla a termine conciliando quella maggior brevità ed esattezza che la natura del problema comporta.

Veggiamo un esempio, il quale servirà di norma.

§. 20. È proposta una sferoide generata per la rotazione dell' ellisse $\alpha\beta\delta$ intorno al proprio asse $\lambda\mu$. Fig. 5

La sua posizione dev' essere tale che il centro sia projettato in C sul piano geometrico, ed in *c* sul quadro. La projezione dell' asse $\lambda\mu$ cada, sul piano geometrico, nella retta LB, e la sua inclinazione col detto piano sia misurata dall'angolo $\mu\varepsilon\theta$. XZ rappresenti la fondamentale.

Si dimanda la prospettiva paralella della data sferoide, essendo dato l'angolo d' inclinazione Igi, che i raggi visuali devono formare col piano geometrico, e prescrivendosi che alle altezze vere abbiano ad essere aggiunte le differenze loro dalle apparenti, per ottenere queste ultime.

Per tanto è mestieri prima esprimere graficamente le

condizioni del problema, descrivendo sul piano geometrico la projezione dell' oggetto proposto.

È noto, §. 132, P.I, che questa projezione dev' essere un' ellisse, e che uno de' suoi assi cadrà nella retta LB.

Conduciamo due rette $i\delta$, $\theta\beta$ tangenti l' ellisse $\alpha\beta\delta$ in δ, e β, e perpendicolari alla $\varepsilon\theta$. La retta, che unisce i due punti di contatto β, δ, è un diametro; perciò sono eguali fra loro le distanze delle due tangenti dalla retta $\gamma\nu$, che suppongo condotta dal centro γ dell' ellisse $\alpha\beta\delta$, ad angoli retti sopra la $\varepsilon\theta$, ed essere eguale all' altezza Fc del centro della sferoide.

Adunque posta l'una e l' altra delle due CB, CD eguale alla $\nu\theta$, sarà BD projezione del diametro $\beta\delta$, allorchè la sferoide sia collocata secondo le condizioni del problema.

Per C conducasi la retta ACE normale alla BD, e facciasi, tanto A C, quanto C E, eguale al semiasse $\alpha\gamma$ dell'ellisse $\alpha\beta\delta$. L' ellisse ABED, descritta intorno agli assi BD, AE, sarà la cercata projezione della sferoide sul piano geometrico.

Imperciocchè non è mestieri dimostrare che sul piano $\varepsilon\mu\theta$, la sferoide è projettata nell' ellisse generatrice $\alpha\beta\delta$ §§. 89, 132, P. I, e che nel diametro $\beta\delta$ è projettata una sezione piana, che sarà un' ellisse, di cui l' asse traverso essendo $\beta\delta$, il semiasse conjugato sarà $\alpha\gamma$.

Nella circonferenza di questa sezione accaderà il contatto fra la superficie della sferoide, ed una superficie cilindrica generata da una retta, la quale, nel suo movimento, si trovi sempre paralella alla tangente $i\delta$.

Adunque se la sferoide si porti nella prescritta posizione, la detta sezione sarà projettata nell' ellisse ABED. Per la qual cosa una retta, che rimanendo sempre normale al piano geometrico, percorra la circonferenza ABED, toccherà continuamente la sferoide nella circonferenza di quella sezione; e perciò nell' ellisse ABED sarà la projezione della sferoide sul piano geometrico.

Ciò premesso, determiniamo il contorno apparente, e descriviamone la prospettiva.

Sian descritte due rette Pp, Qq, tangenti l'ellisse ABED, e normali alla fondamentale X Z. La retta P Q, la quale unisce i due punti di contatto P, Q, è un diametro.

Ma sappiamo, §. 132, P. I, che il contorno apparente è un' ellisse, la quale ha il centro comune con la data sferoide; ed in oltre le rette PK, QG sono projezioni di due raggi visuali. Adunque PQ è ancora projezione d' un diametro del contorno apparente.

Oltre di che i punti projettati in P, Q giacciono nell' ellisse projettata in ABED, che è la sezione rappresentata in $\beta\,\delta$. Adunque il diametro del contorno apparente projettato in PQ giace nel piano di quella sezione, ed è pure diametro di essa.

Conduciamo perpendicolare alla C D, la P R, che sarà projezione d' una retta, la quale, dal punto della predetta sezione che è projettato in P, cade perpendicolare sul diametro projettato in BD. Avranno dunque eguale altezza i punti projettati in P, ed R; e perciò, posta la vt eguale alla CR, ed elevata la tr normale alla $\varepsilon\theta$, che incontri in r la $\beta\delta$, sarà tr misura dell' altezza che ha il punto projettato in P, e quello projettato in R.

Pongasi la g1 eguale alla CF, e la g2 eguale alla PK. Pei punti 1, 2 siano condotte perpendicolari alla g2 le 1 I, 2 II, le quali vadano a terminare nella g II. Sarà 1 I quella lunghezza che dovremo aggiugnere alla Fc per ottenere la prospettiva c' del centro, e 2 II sarà la lunghezza da aggiugnere alla tr per avere l' altezza apparente Kp del punto projettato in P; e quindi la sua prospettiva p, §. 13. Ciò posto, nella retta $p\,c'$, prodotta ad incontrare la Gq in q, sarà la prospettiva del diametro projettato in PQ, il quale, come abbiamo già osservato, appartiene al contorno apparente.

Poichè la prospettiva cercata è un' ellisse, che nasce

dalla sezione fatta dal quadro nel cilindro visuale, sarà $p\,q$ un diametro di quest' ellisse, e resta ancora da trovare il diametro conjugato di $p\,q$.

Intanto si osservi che il diametro conjugato di pq, dev' essere nella retta Fc', perchè le due Kp, Gq sono tangenti dell' ellisse che è la prospettiva cercata, e la retta F c' è paralella ad esse tangenti.

La projezione poi d' un diametro della sferoide, la cui prospettiva cada nella F c' sarà, sul piano geometrico, nella retta SCF; e perciò quel diametro spetterà ancora ad una sezione che sia fatta nella sferoide da un piano condotto perpendicolare al piano geometrico per la SF.

Noi abbiamo tutti i dati necessarj per descrivere cotesta sezione.

Imperciocchè è manifesto ch' essa ha un diametro projettato nel punto C, sul piano geometrico, ed eguale al diametro $h\,n$. In oltre è pur manifesto che il corrispondente diametro conjugato ha la sua projezione in MS, e giace nel piano dell' ellisse projettata in ABED.

Conducasi dunque la MV normale in V alla BD, e fatta la vu eguale alla CV, s' innalzi la normale $u\,r'$ che vada ad incontrare in r' la retta $\beta\,\delta$. Come fu dimostrato che tr denota l' altezza del punto projettato in P, così dimostrasi che $u\,r'$ denota l' altezza del punto projettato in M. Ponghiam ora la retta $v'\gamma'$ normale alla vv', ed eguale alla $v\gamma$; indi si faccia tanto $v'\,m$, quanto $v'\,s$ eguale alla CM, o pure alla CS, e s' innalzino le normali $m\,m'$, $s\,s'$, delle quali la prima si farà eguale alla $u\,r'$. La retta condotta dal punto m' pel punto γ' ad incontrare in s' la $s\,s'$, rappresenterà evidentemente quel diametro che è projettato in MS. Posta poi l' una e l' altra delle $\gamma'\,n'$, $\gamma'\,h'$ eguale alla γn, o pure alla $\gamma\,h$, la retta $h'\,n'$ esprimerà il diametro che è projettato nel punto C, ed è conjugato del diametro $m'\,s'$. Adunque l' ellisse $m'\,n'\,s'\,h'$, descritta intorno a questi due diametri conjugati, sarà eguale e simile alla

sezione della sferoide, projettata nel diametro M S dell' ellisse A B E D.

Ora a quell' ellisse $m'n's'h'$ condurremo due tangenti paralelle alla retta g II, le quali rappresenteranno que' due raggi che toccano la sferoide, e sono projettati nella retta SF.

Cadano i contatti ne' punti ω, ω'; e questi saranno termini d' un diametro $\omega\ \omega'$, il quale è comune e alla sezione ora descritta, e al contorno apparente; e la sua prospettiva cade nella retta F c'.

Dal punto ω si guidi una normale $\omega\varphi$ sopra la $\nu' m$, e denoterà l' altezza vera del termine ω. Pongasi C Φ eguale a $\nu'\varphi$, e g 3 eguale alla F Φ; indi col metodo solito si trovi la misura 3 III da doversi aggiugnere all' altezza vera $\omega\varphi$ per aver l' altezza apparente del termine ω.

Fatta dunque la F o eguale alla $\omega\varphi$ insieme con la 3 III, sarà o la prospettiva del termine ω, cioè sarà $c'o$ il semidiametro conjugato di pq.

Per la qual cosa basterà porre $c'o'$ eguale a $c'o$, affinchè sia determinato il diametro intero oo'; e per conseguenza sarà pure determinata l' ellisse $po'qo$, che è prospettiva della sferoide proposta.

§. 21. Ma sebbene si possa descrivere per punti il contorno apparente, e la sua prospettiva, con esattezza geometrica, giova talvolta in pratica sostituire ad esso contorno un' altra linea che vi si approssimi, e sia più facile da descrivere in prospettiva.

Darò un esempio di quest' artificio fingendo che richieggasi la prospettiva paralella del toro d' una colonna.

Sia data sul piano geometrico la projezione del toro nel circolo A B D B'. La figura $amdn$ sia la sua projezione sul quadro, ed mn rappresenti il suo asse diviso per mezzo nel punto projettato in c. Fig. 6

Il semicircolo $d'de$ rappresenti quello che, rotando intorno al detto asse, genera la superficie curva del toro. Le due rette md', ne rappresentino quelle che, rotando anch'

esse intorno all' asse medesimo, descrivono i due circoli, i quali sono come le basi del solido.

In oltre αKL sia l' angolo d' inclinazione dei raggi visuali col piano geometrico, e debbano le altezze apparenti esser maggiori delle vere.

Se immaginiamo un raggio che, rimanendo sempre paralello alla sua prima direzione, movasi intorno alla superficie del toro, sempre toccandola, e generi frattanto una superficie cilindrica involvente e tangente quella del toro, la linea di contatto sarà il cercato contorno apparente.

Ogni qual volta la direzione de' raggi non è nè paralella, nè normale a quella dell' asse, la detta linea di contatto ha doppia curvatura, come, in generale, si rappresenta nella Fig. 39, P.I.

Fingiamo la projezione del toro trasportata sopra un piano perpendicolare al piano geometrico, e paralello alla data direzione de' raggi visuali. La detta projezione potrà pur essere rappresentata dalla medesima figura *amdn*.

Conducasi una retta paralella alla KL, e tangente in *i* la semicirconferenza *d'de*, indi si descriva la retta *ich*. Se in oltre descriveremo la projezione del contorno apparente, sarà questa una linea sinuosa *hlcgi*, posta alternamente co' suoi rami simili *hlc*, *igc* intorno alla retta *hi*, come il contorno stesso è posto alternamente colle sue metà rispetto al piano dei due assi, che lo dividono in quattro parti eguali, e simili. Uno di essi è la stessa retta *hi*; l' altro eguaglia la *ad*, ed è projettato nel punto *c*, che divide per mezzo la retta *mn*, rappresentante l' asse del toro.

Ora se in vece di descrivere per punti la prospettiva del contorno apparente, noi descriveremo la prospettiva dell' ellisse che è determinata dagli assi predetti, ciò basterà per soddisfare a tutta quella esattezza che suol richiedersi in pratica.

Per tanto pongasi CI eguale alla distanza del punto *i* dalla retta *mn*, ed ancora CH, eguale a CI.

L' el-

L' ellisse descritta intorno alle rette AD, HI, come suoi assi, sarà, sul piano geometrico, la projezione dell' ellisse che vogliamo sostituire al contorno apparente.

Conduciamo per K la retta K 3 paralella alla B B', e ponghiamo l'angolo 3KIII eguale all'angolo αKL. Pei punti C, I condotte le rette CIII, I IV, determineremo nel solito modo le parti 3 III, 4 IV da aggiugnere alle rispettive altezze vere dei punti c, i per aver le loro altezze apparenti. Facciasi dunque la Nj eguale alla distanza del punto i dalla XZ, insieme con la 4 IV; e sarà j prospettiva del punto che abbiamo rappresentato in i, la cui projezione sul piano geometrico fu posta in I. Similmente facciamo Nc' eguale alla nc insieme con la 3III, e sarà c' prospettiva del punto che divide per mezzo l' asse del toro, cioè del centro dell' ellisse, della qual vogliamo descrivere la prospettiva.

L' asse maggiore della detta ellisse, il quale è projettato in AD, sarà eguale alla sua prospettiva, essendo paralello al quadro.

Perciò si descriva la retta $\alpha c' \delta$ paralella alla XZ, e facciasi tanto la $c'\alpha$, quanto la $c'\delta$ eguale alla CA, onde la retta $\alpha\delta$ eguagli la DA, e sia la prospettiva dell' asse projettato in DA.

Ma j è prospettiva d' un estremo dell' altr' asse, projettato in I H; ed in oltre la prospettiva dell' asse medesimo dev' essere perpendicolare alla $\alpha\delta$. Adunque sarà nella retta jN; e perciò fatta la c'H' eguale alla $c'j$, saranno $\alpha\delta$, H'j gli assi dell'ellisse che è prospettiva della proposta. Sarà dunque prossimamente nell' ellisse $\alpha j \delta$H' la prospettiva del toro.

Ma perchè sia compiuta, conviene descrivere ancora la prospettiva d' una delle basi, cioè di quella che rimane visibile, secondo le condizioni del problema. Questa prospettiva sarà un' ellisse, della quale l' asse maggiore dovrà eguagliare il diametro GE, e l'asse minore sarà prospettiva dell' altro diametro projettato in D'F. Il suo centro si trova po-

nendo $c'\mu$ eguale a cm, giacchè l' asse del toro, essendo paralello al quadro, sarà eguale in lunghezza alla sua prospettiva; onde $c'\mu$ eguaglierà la prospettiva della metà superiore dell' asse; e quindi μ sarà prospettiva del suo estremo superiore, che è pur centro del circolo projettato in D'EFG.

Condotta dunque G'E' perpendicolare alla Nj, e fatta eguale ciascheduna delle due μE', μG' alla CE, sarà G'E' l' asse maggiore dell' ellisse che dobbiamo descrivere.

Ora conducendo paralella alla XZ la D'II, si determini la misura 2II che dev' essere aggiunta alla mn per avere l' altezza apparente Nd' del punto projettato in D', la cui prospettiva sarà d'.

Perciò $\mu d'$ è il semiasse minore, e posta la μf eguale alla $\mu d'$, tutta la retta $d'f$ sarà l' asse minore della cercata ellisse EfG'd' descritta intorno ai due assi G'E', $d'f$.

§. 22. Abbiamo già osservato che se l' oggetto ha dimensioni paralelle al quadro, le dimensioni corrispondenti nella prospettiva sono eguali e paralelle ad esse. Ma non così avviene di quelle che sono oblique, le quali potranno essere indefinitamente esagerate nella prospettiva. Da queste esagerazioni nasce la deformità accennata nel §. 14, la quale si evita in parte con la pratica ivi insegnata di far sì che le projezioni de' raggi visuali sul piano geometrico siano perpendicolari alla linea fondamentale; in parte poi coll' assegnare una misura conveniente all' angolo dell' inclinazione loro col piano geometrico. Per quanto ho raccolto dall' esperienza, non deve quell' angolo esser maggiore di 25° per ottenere nelle descrizioni di tal natura un effetto soddisfacente all' occhio.

Ciò nulla ostante, in alcuni casi, è inevitabile qualche deformità. Ovvio è l'esempio d' una sfera, la cui prospettiva paralella, purchè i raggi non siano perpendicolari al quadro, dev' essere sempre un' ellisse che avrà l' asse principale maggiore del diametro della sfera medesima.

Nella figura ellittica, se tale apparisca all' occhio, mai non saremo indotti a giudicare che sia l'immagine d'una sfera, la quale immagine suole, e deve sempre apparire di forma circolare, come dimostrerò a suo luogo §. 60.

Se dunque vogliamo appagare il giudicio dell' occhio, sarà forza, in questo ed in altri casi analoghi, declinare alquanto dai principj sui quali è fondato il metodo geometrico di tali descrizioni. Se all' opposto vorremo rigorosamente osservare i principj, resteranno offese le abitudini dell' occhio.

Non volli omettere queste osservazioni, perchè stimo che possano prevenire, o risolvere certe perplessità, ed obbiezioni, le quali soglion nascere nel corso delle pratiche. Ma fuori dei casi simili a quello che ho testè accennato, l'artificio della prospettiva paralella serve assai comodamente per rappresentare le macchine, le loro parti singole, gli istrumenti da usarsi nelle arti, ed altrettali cose, delle quali e si esprime al vero la forma, e si mostrano esatte le dimensioni, aggiugnendo l'icnografia, che insegna le dimensioni orizzontali alla descrizione prospettica di questo genere, la quale significa tutte le dimensioni verticali. Anzi di questa prospettiva si giovano ancora i Topografi, e gli Ingegneri per rappresentare estesi edifizj, e piani di fortificazioni, e talvolta intere città, chiamando quelle descrizioni *prospettive a vista di uccello*, o pure *prospettive a cavaliere*, le quali altro per lo più non sono, fuorchè prospettive paralelle descritte sopra un piano orizzontale, che si assume in luogo del quadro.

§. 23. Nelle prospettive ora menzionate suol essere di 45° l' angolo d' inclinazione dei raggi visuali col piano geometrico, che in tali casi fa ufficio di quadro.

Segue da quest' ipotesi che nella prospettiva si esprimono inalterate e le dimensioni orizzontali, e le verticali.

Sia, per cagion d' esempio, nel quadrato ABCD la projezione retta d' un cubo, sul piano geometrico. Fig. 4

Descrivasi la prospettiva paralella di questo solido sul

piano stesso, nell' ipotesi precedentemente enunciata.

La projezione d'un raggio sia AC', e conduciamo le BB', CA', DD' paralelle ad essa AC'. Facciasi questa, e ciascheduna delle dette paralelle eguale al lato AB del cubo; ed otterremo così le prospettive dei lati verticali, le quali rispettivamente s' eguagliano ai lati stessi.

Congiunte dunque le A'B', B'C', C'D', D'A', sarà compiuta la prospettiva del solido, che si conoscerà essere un cubo, tosto che sappiasi essere stato assegnato un angolo semiretto ai raggi visuali, giacchè le prospettive AC', BB', CA', DD' dei lati, che sappiamo essere verticali, si trovano eguali, ciascheduna al lato AB.

Fig. 7 §. 24. Nel quadrato ABCD sia projettato un ottaedro regolare, di cui si vuol descrivere la prospettiva paralella sul piano della projezione ABCD, nell' ipotesi precedente.

Sia B*b* projezione d' un raggio, e le A*a*, C*c*, D*d* siano projezioni analoghe di altrettanti raggi relativi ai punti projettati in A, C, D. Ciascheduna si farà eguale alla BE, essendo questa eguale alla differenza tra la distanza del vertice inferiore, e la distanza d' uno dei punti projettati in A, B, C, D dal piano di projezione, §. 96, P. I. Similmente si porrà E*e* paralella alla B*b*, ed eguale alla BD; onde sarà E*e* prospettiva dell' asse; e congiunti gli altri lati, come apparisce chiaramente nella figura, sarà descritta la prospettiva del solido, il quale si conoscerà che dev' essere un ottaedro regolare, quando sappiasi che l' inclinazione assegnata ai raggi è di 45°, e che la retta corrispondente alla prospettiva E*e* si trova perpendicolare al piano della descrizione.

In generale, cotali descrizioni sono più comode per chi le deve eseguire che per chi debba da esse inferire le vere misure degli oggetti rappresentati. Oltre di ciò, per lo più non presentano un aspetto gradevole all' occhio.

§. 25. Ma qualunque inclinazione sia stata assegnata ai raggi visuali nel descrivere la prospettiva, si possono talvolta da essa sola dedurre le dimensioni vere dell' oggetto.

Fingiamo che *am*, *an* siano prospettive di due rette, e sappiasi che debbon essere nel piano geometrico. In oltre sia noto l' angolo da esse compreso, la cui prospettiva è l'angolo *m a n*. Io dico che per questi dati potremo determinare le vere lunghezze delle rette obbiettive rappresentate dalle *a m*, *a n*. Fig. 8

Imperciocchè prolunghiamo le rette *a m*, *a n* fino ad incontrare la fondamentale X Z, che potrà essere supposta nel margine inferiore del quadro. Sopra la retta P Q, intercetta dai due punti d' incontro P, Q, descriviamo un segmento di circolo P A Q, capace dell' angolo noto; e si conduca dal punto *a* la retta *a* B A perpendicolare alla X Z, e secante in A l' arco P A Q.

Condotte le due rette P A, Q A, è manifesto che saranno esse le obbiettive corrispondenti alle prospettive P*a*, Q*a*. Perciò i loro prolungamenti AM, AN conterranno le obbiettive corrispondenti alle date prospettive *a m*, *a n*.

Conduciamo per tanto dai punti *m*, ed *n* le rette *m*M, *n*N perpendicolari alla X Z, le quali vadano ad incontrare rispettivamente, in M, ed N le A M, A N. Sarà A M la misura dell' obbiettiva corrispondente alla prospettiva *am*, ed A N la misura dell' altra obbiettiva corrispondente alla prospettiva *a n*.

Imperciocchè, essendo P *m* prospettiva della retta P M, il punto obbiettivo corrispondente alla prospettiva *m* dovrà essere e nella stessa P M, e nella *m* M, §. 15. Non potrà dunque essere altrove che in M; e perciò la lunghezza obbiettiva corrispondente alla lunghezza prospettica P *m* sarà la PM. Ma P A è la lunghezza obbiettiva corrispondente alla lunghezza prospettica P *a*; dunque A M è l' obbiettiva corrispondente alla *a m*. Similmente si prova essere A N la lunghezza obbiettiva corrispondente alla *a n*.

Egli è poi manifesto che si otterrà dalla nostra costruzione il medesimo effetto, ancorchè la X Z non sia la vera fondamentale, quando però sia paralella ad essa.

Determinate così le dimensioni obbiettive A M, AN, e le posizioni dei punti A, M, N, si può tosto conoscere l'inclinazione dei raggi visuali, secondo la quale fu descritta la prospettiva.

Imperciocchè dalla costruzione ottenghiamo la distanza B A del punto A, ed abbiamo ancora la sua altezza apparente B *a*.

Adunque si ponga la ZL paralella alla BA, e si conduca la A I paralella alla X Z, producendola a tagliare in 1 la Z L. Facciasi in oltre il prolungamento 1 I eguale alla B *a*, e si conduca la Z I. Sarà L Z I l'angolo dell'inclinazione predetta, §§. 15, 16.

Ora supponghiamo che il punto *r* sia prospettiva d'un punto che spetti al medesimo oggetto, al quale appartengono le due obbiettive rappresentate dalle *a m*, *an*; e si voglia conoscere la vera distanza dei due punti rappresentati in *m*, ed *r*, cioè la dimensione obbiettiva corrispondente alla prospettiva *m r*.

Pongasi Z*r'* eguale all'altezza apparente del punto rappresentato in *r*, cioè alla distanza C *r* di esso punto *r* dalla XZ. Per *r'* sia condotta paralella alla Z L la *r'*II, che incontri in I I la Z I, prolungata quant'è mestieri. Sarà *r'* I I la distanza competente al punto obbiettivo rappresentato dalla prospettiva *r*. Se dunque si produca la *r*C in R, tanto che sia C R eguale ad *r'* II, il punto R sarà, sul piano geometrico, la projezione del punto obbiettivo corrispondente alla prospettiva *r*; ma perchè C *r* è l'altezza apparente di questo punto, e 2 II è la differenza fra l'altezza apparente, e la vera, conosceremo tosto quest'altezza vera; e quindi si potrà conoscere, §. 11, P. I, la dimensione obbiettiva projettata nella retta M R sul piano geometrico, e rappresentata in prospettiva dalla retta *m r*.

Fig. 9 §. 26. Nella Fig. 9 si rappresenti l'argano A in prospettiva paralella.

È manifesto che le due rette obbiettive corrispondenti

alle due *bc*, *cd* sono fra loro ad angoli retti, e giacciono in un piano orizzontale. Questo dato sarà sufficiente per discoprire, mediante l' applicazione del §. 25, tutte le vere dimensioni della macchina rappresentata in questa figura.

Accennerò soltanto il significato delle linee e dei punti principali della costruzione, che è quanto basta per indicare come debba essere compiuta.

e, *f*. Punti d' incontro rispettivi delle rette *bc*, *dc* con la XZ.

*e*C*f*. Semicircolo descritto sul diametro *ef*, perchè retto è l' angolo obbiettivo rappresentato in *ecf*.

C. Punto obbiettivo corrispondente alla prospettiva *c*.

*e*C, *f*C. Obbiettive delle *ec*, *fc*.

GC. Dimensione obbiettiva corrispondente alla *cg*.

CD. Dimensione obbiettiva corrispondente alla *cd*.

ci. Altezza apparente del punto rappresentato in *c*, cioè del punto C, alla quale altezza si pone eguale la misura *i*I.

2 ZII. Angolo d' inclinazione dei raggi visuali.

ch. Dimensione verticale della trave rappresentata in *hd*. §. 17.

km. Dimensione verticale del cilindro.

ec.

Da quanto fu detto nel precedente §. 25, e si mostra in quest' esempio, raccogliamo che se ad una prospettiva paralella si aggiunga la scala, e la misura dell' angolo d' inclinazione attribuito ai raggi visuali, da essa prospettiva potremo dedurre tutte le dimensioni dell' oggetto corrispondente.

§. 27. Intorno alle figure delle immagini allorchè la superficie prospettica non è piana, fu in generale accennato abbastanza, mostrando ch' essa figura è l' intersecazione del prisma, o del cilindro visuale con la detta superficie prospettica, §. 3. Ma perchè a questo argomento si riferisce la determinazione geometrica delle ombre, mi riserbo a trat-

tarlo per disteso, quando ragioneremo di esse. Ora è tempo di passare alla Prospettiva propriamente detta, cioè alla Prospettiva concorrente.

CAPITOLO III.

Della Prospettiva concorrente.

§. 28. Dalla diversità delle due ipotesi, una delle quali è fondamento alla prospettiva paralella, l'altra alla prospettiva concorrente, §. 11, la prima e per se manifesta conseguenza che deriva, consiste in ciò che nell' una specie di prospettiva niuna dipendenza v' ha tra la figura dell'immagine, e le distanze reciproche dello spettatore, dell' oggetto, e del quadro; non così nell'altra, ove la grandezza dell' immagine dipende necessariamente dalla ragione delle predette distanze.

In fatti in una superficie di forma prismatica, o cilindrica possiamo ottenere una serie di sezioni fatte da un' altra superficie qual si voglia, che successivamente si trasferisca in varie posizioni; e tutte quelle sezioni possono essere eguali e simili fra di loro. Ma se la medesima superficie secante tagli in vece una superficie piramidale, o conica, potranno bensì essere fra loro simili tutte le sezioni, ma non mai eguali; mentre le più vicine al vertice sono sempre minori delle più lontane.

In oltre ponghiamo immobile nel proprio sito la superficie secante; e si scosti da essa o l'oggetto, rimanendo fermo l' occhio, o questo rimanendo fermo l' oggetto, o l' uno e l'altro insieme. È chiaro che la piramide, o il cono visuale, si muterà in ciascheduna delle dette circostanze; e quindi varia sarà pur la sezione, cioè la figura dell' immagine.

§. 29. Dato di figura e di posizione l' oggetto, e dato ancora di posizione il punto di vista, determinato è il co-

no

no, o la piramide visuale; onde se a questi dati si aggiunga ancora la forma e la posizione della superficie prospettica, sarà determinata la figura dell'immagine, perchè determinata è l'intersecazione delle due superficie, §. 3. Ma se avremo dati la figura dell' immagine ed il punto di vista, non sarà determinata ogni condizione spettante alla grandezza e alla posizione dell' oggetto, perchè quei dati non altro determinar possono che il cono, o la piramide visuale, considerando l' uno e l' altra come indefiniti nella lunghezza loro.

La superficie, piramidale, o conica potrà involgere e toccare ad un tempo diversi oggetti, ai quali tutti corrisponderà la medesima figura dell'immagine. Ed in vero una medesima superficie conica potrà comprendere e toccare infinite sfere, che abbiano i diametri proporzionali alle distanze de' loro centri dal vertice; ed in serie con quelle sfere potrebbero essere infinite sferoidi, altre oblunghe, altre compresse, i quali oggetti tutti dovrebbero avere la figura dell' immagine determinata in quella medesima sezione che si produce nel supposto cono dalla superficie prospettica.

Queste osservazioni ci mostrano che se la figura dell'immagine può sempre determinarsi, quando sian dati di forma e di posizione l' oggetto ed il quadro, ed ancora sia data la posizione del punto di vista; non è generalmente possibile l' esecuzione del problema inverso, cioè determinare compiutamente l'oggetto, essendo data l'immagine ed il punto di vista.

§. 30. È chiaro che in ultima analisi, ogni operazione di prospettiva lineare si riduce alla semplice descrizione della prospettiva di un punto. In fatti la figura dell' immagine è contenuta dalla prospettiva del contorno apparente; questa prospettiva poi si determina costruendo le prospettive dei punti che giudichiamo sufficiente assegnare nel detto contorno. Ma la pratica esecuzione di questo metodo, come abbiamo osservato nella prospettiva paralella, così nella concorrente, abbisogna assai spesso di certi artificj, per

conciliare l'ordine e la brevità del lavoro con quel grado di esattezza che si desidera. Gli espedienti più utili, e comunemente adottati derivano dai seguenti principj.

§. 31. *La prospettiva di un punto è sempre nella projezione retta, sul quadro, del raggio visuale che proviene da quel punto, e termina nel punto di vista.*

Imperciocchè se pel punto di vista e pel punto obbiettivo immaginiamo che sia condotto un piano perpendicolare al quadro, in quel piano sarà il raggio visuale, e nell' intersecazione di quel piano medesimo col quadro è la projezione retta del raggio visuale, §. 10, P.I. In questa projezione è dunque il punto d' incontro del raggio col quadro, cioè la prospettiva del proposto punto.

§. 32. *La Prospettiva del detto punto dividerà la projezione del raggio in due parti, le quali avranno fra loro quella ragione che hanno le distanze del punto obbiettivo, e del punto di vista dal quadro.*

Fig. 10 Si rappresenti in X S Z il piano geometrico: in X Z la fondamentale: in X *o* Z il quadro. Sia O il punto di vista: *o* la sua projezione retta sul quadro, cioè il punto principale.

In A sia il punto obbiettivo, ed in *a* la sua projezione retta sul quadro; e sia descritta la retta A O nello spazio, e la *a o* sul quadro.

La prima rappresenterà il raggio visuale, e la seconda sarà sua projezione retta. Siano congiunte ancora le due rette O *o*, A *a*, le quali devono essere normali al quadro, §. 1, P.I, e §.8. Si formeranno i due triangoli simili O*oa'*, A*aa'*, opposti al vertice nel punto *a'*, dove è manifesto che accade l'intersecazione del raggio visuale col quadro; e quindi *a'* è la prospettiva del punto A. Adunque la retta *a o*, che è projezione del raggio visuale A O, è divisa in due parti *a' o*, *a' a* dalla prospettiva *a'*, le quali sono proporzionali alle due perpendicolari O *o*, A *a*, cioè alle distanze del punto di vista O, e del punto obbiettivo A dal quadro.

Alla medesima conclusione si perviene ancora quando il punto obbiettivo A, ed il punto di vista O si trovino ambedue da una medesima parte rispetto al quadro; se non che in tal caso il punto *a'* cadrà nel prolungamento della *o a* oltre al punto *a*.

§. 33. *La declinazione vera alla declinazione apparente di un punto obbiettivo, sta come la distanza di esso insieme con quella del punto di vista alla sola distanza del punto di vista.*

Per la projezione S del punto di vista sul piano geometrico si tiri la retta S S' normale alla X Z in S', e producasi indefinitamente. Dal punto A', projezione del punto obbiettivo A sul piano stesso geometrico, sia condotta la A'P normale in P alla S S' prolungata, e descrivasi la S A' che seghi in α la X Z. Sarà la A'P, misura della declinazione vera, S'α sarà la declinazione apparente del punto projettato in A'; e le due A'P, α S' sono proporzionali alle due S P, S S'. Ma S' P eguaglia la distanza del punto obbiettivo, ed S S' eguaglia la distanza del punto di vista dal quadro; dunque la declinazione vera A' P alla declinazione apparente α S', è come la distanza del punto di vista insieme con quella del punto obbiettivo dal quadro alla sola distanza del punto di vista. Fig. 10

§. 34. Supponendo le altezze riferite ad un piano che passi pel punto di vista e per la linea orizzontale, cioè supponendo che il piano geometrico passi per l' occhio, la proposizione antecedente si applica ancora alle altezze vere ed apparenti; e perciò *l'altezza vera all' altezza apparente è come la declinazione vera alla apparente*.

§. 35. Le due precedenti proposizioni furono dimostrate nell' ipotesi che il quadro giaccia fra 'l punto di vista, ed il punto obbiettivo; ma è manifesto che ancora quando il punto obbiettivo sia posto fra 'l punto di vista ed il quadro, si perviene alla medesima conclusione, considerando la distanza del punto obbiettivo come negativa §. 9.

Adunque tanto la declinazione vera all' apparente, quanto l' altezza vera all' apparente, sarà nel primo caso come la distanza dell' occhio, insieme con quella del punto obbiettivo alla sola distanza dell' occhio; nel secondo caso poi sarà come la differenza fra le distanze del punto obbiettivo, e del punto di vista dal quadro, alla sola distanza del punto di vista.

§. 36. *Le prospettive di quante rette si voglia che concorrano ad un punto dello spazio, concorreranno nella prospettiva di quel punto.*

§. 37. *Le prospettive di rette che siano paralelle fra loro concorreranno, in generale, ad un punto che si chiama punto accidentale.*

Esso è quello ove il quadro è incontrato da una retta che dal punto di vista sia condotta paralella alle rette obbiettive.

Imperciocchè in quella retta si taglieranno scambievolmente tutti i piani che saranno condotti pel punto di vista, e per le obbiettive proposte. Le intersecazioni di tutti questi piani col quadro concorreranno dunque nel punto ove quella retta comune a tutti i detti piani incontra il quadro. Ma in esse intersecazioni sono le prospettive delle linee date; dunque ec. Segue da ciò.

1° *Che se le rette date saranno paralelle al quadro, le loro prospettive saranno fra loro paralelle, o vero il punto del loro concorso avrà una distanza infinita dal punto principale.*

2° *Se le rette obbiettive saranno paralelle al piano geometrico, il loro punto accidentale sarà nella linea orizzontale.*

3° *Se le rette obbiettive saranno perpendicolari al piano geometrico, le prospettive loro saranno perpendicolari alla fondamentale.*

4° *Se le dette obbiettive saranno perpendicolari al quadro, le loro prospettive concorreranno nel punto principale.*

5° *Se le obbiettive saranno paralelle ed al quadro, ed al piano geometrico, le prospettive di esse saranno paralelle alla linea fondamentale.*

A questi pochi e facilissimi principj si riduce la teoria di tutti i metodi, che sono per esporre, ciascheduno dei quali ha i suoi pregi particolari, secondo le circostanze dell'area sopra cui si deve eseguire la costruzione.

§. 38. Sul piano geometrico, rappresentato in X A Z, sia data la projezione A di un punto obbiettivo, del quale si conosca ancora l' altezza. Sia S il punto di stazione, e rappresentando nella parte X *o* Z il quadro adattato al piano geometrico, pongasi in *o* il punto principale; onde S, *o* saranno nella medesima retta S *o* S', normale in S' alla X Z. Quella retta considerata nel piano geometrico, rappresenterà la sua intersecazione col piano verticale, e considerata nel quadro, rappresenterà la linea verticale, §. 8. Fig. 11

Pel punto A elevisi una normale A A' *a* alla fondamentale X Z, e si prolunghi tanto che sia A'*a* eguale alla data altezza. Pel medesimo punto A si guidi una retta A S al punto di stazione; e questa seghi in A'' la XZ. Dal punto A'' innalziamo una normale A''*a'* alla XZ, e si congiunga la retta *a o*, che seghi in *a'* la detta normale. Sarà *a'* la prospettiva del punto dato.

Imperciocchè la retta *a o* è projezione sul quadro del raggio visuale che parte dal punto dato e termina al punto di vista. Il punto *a'* divide questa retta in due parti *a' o*, *a' a*, le quali sono fra loro come le due rette S' A'', A'' A'; e queste come le SS', AA'; dunque il punto *a'* è prospettiva del punto dato, §. 32.

Se l' altezza data fosse negativa, è chiaro che, in vece di applicarla al prolungamento della AA' oltre A' si dovrebbe applicare alla stessa AA' da A' verso A, rimanendo inalterata ogni altra parte del metodo.

Niun cangiamento dovrà farsi quando sia da descrivere la prospettiva nell' ipotesi che il punto obbiettivo

cada tra il punto di vista ed il quadro ; se non che , in tal caso , la prospettiva a' riuscirà nel prolungamento della $o\,a$, §. 32 .

Per maggior comodo nell' esecuzione potremo fermare un filo nel punto S , ed un altro filo nel punto o . Dirigendo il primo alle projezioni date A , B , C ec. dei punti obbiettivi sul piano geometrico, si determinan le declinazioni apparenti S'A'', S'B'', S'C'' ec. Dirigendo il secondo alle projezioni corrispondenti a, b, c ec., descritte sul quadro, si determinan sulle rispettive normali A''a', B''b', C''c' le altezze apparenti , ed insieme le prospettive cercate .

Fig. 12 §. 39 . Posti i medesimi dati di prima , descriviamo la retta $o\,s$ con qualunque direzione , e si faccia eguale al raggio principale, cioè alla S S' , Fig. 11 . Trovata sul quadro la projezione retta a del punto obbiettivo , descriviamo la retta $a\,a''$ paralella alla $o\,s$, e procedente ad opposta parte ; indi fatta $a\,a''$ eguale alla distanza A A', sian descritte le due rette $s\,a''$, $o\,a$, le quali si taglino in a' . Sarà a' la prospettiva dimandata .

Imperciocchè $a\,o$ è projezione del raggio visuale terminato al punto obbiettivo ed al punto di vista . Essa è divisa nelle due parti $a'o$, $a'\,a$, che , per la similitudine dei triangoli $s\,o\,a$, $a''a\,a'$, sono proporzionali alle due $o\,s$, $a\,a''$; dunque a' è la prospettiva del punto dato , §. 32 .

Se la distanza A A' fosse negativa , si dovrebbe applicare la sua misura da a in a''', cioè nel medesimo senso della $o\,s$, in vece che nel senso opposto , come la $a\,a''$. Allora il concorso delle $o\,a$, $s\,a'''$ accaderebbe in α', cioè nei loro prolungamenti , e quel punto α' sarebbe la prospettiva , secondo il medesimo principio citato, §. 32 .

Fig. 13 §. 40 . Ponghiamo rappresentata in T V l'intersecazione del piano geometrico, e di un piano verticale . X T Y V rappresenti lo stesso piano verticale . La parte T V X rappresenti il piano geometrico : X Z sia la fondamentale : Z Y l' intersecazione dello stesso piano supposto verticale col quadro .

A, B, C ec. siano sul piano geometrico projezioni di altrettanti punti obbiettivi, dei quali sian note ancora le altezze. S sia il punto di stazione: S' il punto ove la linea verticale incontra la fondamentale. Il punto Ω sia projezione retta del punto di vista sopra il supposto piano verticale TYV, ed *a*, *b*, *c* siano le projezioni dei punti dati, descritte sul piano medesimo.

Ponghiamo che il quadro sia separato dal piano della descrizione ora indicata, e si rappresenti nel rettangolo MNQP. La QP farà ufficio di fondamentale. S'' sarà il punto ov' essa è incontrata dalla verticale, che si rappresenta in S', ed *o* rappresenterà il centro del quadro. Conduciamo la rette SA, Ω*a*, la prima delle quali seghi in I la XZ, e la seconda in *ι* la ZY. È chiaro che S' I sarà misura della declinazione apparente, e Z*ι* sarà misura dell' altezza apparente relative al punto projettato in A—*a*. Se dunque si chiami positiva la parte Z, che è la destra per rispetto allo spettatore, e corrisponda ad essa la parte Q nel quadro MNQP; per l' opposto chiamisi negativa la parte X, alla quale corrisponda la parte P, si porrà la misura S''α eguale ad S' I; è nella retta perpendicolare alla PQ, che passi per α, dovrà essere la prospettiva del punto proposto. Pongasi ancora S''α' eguale alla misura Z*ι*; e la detta prospettiva si troverà in una retta che sia perpendicolare alla S''*o*, e passi per α'.

Si descrivano dunque le due normali accennate; e nel punto della loro intersecazione *a'* sarà la prospettiva del punto proposto.

Quella prospettiva si può egualmente determinare senza descrivere sul quadro le normali occulte α*a'*, α'*a'*. Imperciocchè come fu praticato nel §. 13, prendasi con un compasso la misura S''α, e con un altro la misura S''α'. Pongasi una punta del primo in α', e si descriva un piccolo arco verso *a'*; pongasi una punta del secondo in α, e si descriva un piccolo arco secante il primo archetto già descritto. Sarà la cercata prospettiva *a'* nel punto della loro intersecazione.

Le circostanze del problema, come dissi, §. 13, indicheranno in qual angolo debba essere la prospettiva cercata. Imperciocchè potremo sempre riferire le altezze ad un piano orizzontale che passi per l' occhio, ed allora questo piano sarà rappresentato dalla retta Ω O normale alla Z Y, ed indefinita nella sua lunghezza.

La sua corrispondente nel quadro sarà la X' *o* Z'; onde nel caso nostro la declinazione apparente sarà come prima S''α; ma l' altezza apparente sarà *o* α' eguale alla O *ι*, cioè alla differenza fra l'altezza vera dell'occhio, e l' apparente del punto obbiettivo. Riesce dunque negativa la dimensione *o* α', mentre è positiva la S'' α; e quindi il punto *a'*, cioè la prospettiva richiesta si trova nell' angolo Z' *o* S'', §. 14.

§. 41. Delle tre maniere ora indicate, veggiamo che usar si può la prima quando l' area, dove si eseguisce la costruzione, ammette nella sua altezza la lunghezza del raggio principale, e la maggior perpendicolare che dall' oggetto possa condursi al quadro, intendendo queste due dimensioni prese insieme come una linea sola. Che se sia capace di esse dimensioni bensì nella sua lunghezza, ma non nell' altezza, allora è acconcio il secondo metodo. Il terzo poi sarà opportuno, quando sul campo del quadro non si voglia descrivere quelle linee le quali, compiuta la costruzione, debbano essere cancellate.

A questo effetto di descrivere immediatamente sul quadro le prospettive di que' punti, dei quali si conosce la *distanza*, la *declinazione*, e *l'altezza*, non sarà forse inutile un espediente semplicissimo, che immaginai per eseguire l'operazione in una maniera analoga a quella indicata per la prospettiva paralella, §. 13.

Fig. 14 Siano due rette VV', YY' che si taglino in ω ad angoli retti. Sopra la Y Y' dall' una e dall' altra parte del punto ω, si ponga la misura ωD, e la ωD' eguale al raggio principale. In oltre facciamo la ω Δ eguale alla declinazione vera di un dato punto obbiettivo, ed alla ωD si aggiunga la D*d* eguale al-

alla distanza del punto medesimo dal quadro. Se intendasi condotta la retta Δd, e pel punto D' una retta D'1 paralella ad essa, che vada ad incontrare in 1 la ωV', sarà ω1 la declinazione apparente che compete al dato punto obbiettivo. Imperciocchè nei due triangoli simili $d\omega\Delta$, D'ω1, come è la $d\omega$ alla ωD', cioè la distanza del punto di vista insieme con quella del punto obbiettivo dal quadro, alla sola distanza del punto di vista, così la declinazione vera $\omega\Delta$ alla quarta ω1, che sarà misura della declinazione apparente, come segue dal §. 33.

Nello stesso modo poste le $\omega\Delta'$, $\omega\Delta''$ ec. eguali alle declinazioni vere di altri punti obbiettivi, ed aggiunte alla ωD le Dd', Dd'' ec. eguali rispettivamente alle distanze dei medesimi punti, si otterrà la serie delle misure ω2, ω3 ec. col medesimo metodo, le quali denoteranno le declinazioni apparenti di quei punti.

Se in vece di porre le $\omega\Delta$, $\omega\Delta'$, $\omega\Delta''$ ec. eguali alle declinazioni, si pongano eguali alle altezze, avremo nelle ω1, ω2, ω3 ec. le altezze apparenti che corrispondono alle prospettive dei punti proposti. Ma perchè non possa nascere confusione fra le declinazioni e le altezze, avendo descritta la *scala delle declinazioni*, che così nomino il sistema delle due linee VV', YY' con le dimensioni sopra di esse notate, si costruisca un' altra *scala delle altezze*, separatamente, e sia formata dalle *uu'*, *yy'* come si vede nella figura.

Quando la misura d' una declinazione, o d' un' altezza, sarà negativa, conviene indicare con qualche segno tal circostanza, onde nell' applicare la misura dell' altezza, o della declinazione apparente che deve corrispondere, si vegga senza pericolo di equivoco che dev' essere posta negativamente. Il segno potrà consistere in una lineetta posta sull' estremo della dimensione negativa; come se la $\omega\Delta$ fosse negativa, si porrà una lineetta orizzontale sopra la lettera Δ, e ciò darà ad intendere che la corrispondente ω1 dev' essere applicata in senso negativo.

Serviranno egualmente le stesse scale ancorchè l' oggetto fosse posto fra il quadro ed il punto di vista ; ma in tal caso le dimensioni D *d* , D *d'* ec. in vece di essere aggiunte alla ωD verranno applicate da D verso ω sopra la Dω, ed il rimanente della operazione progredirà come prima .

§. 42. Dopo gli esposti metodi parlerò di quello che riunisce tutti i vantaggi della costruzione esatta , e meglio di qualunque altro può servire a diriggere anche il giudizio dell' occhio nei disegni di approssimazione .

Fig. 15 Il piano X*o*Z rappresenti il quadro : XZ la fondamentale : S*o* la verticale : *o* il centro del quadro: *so* , indefinita nella sua lunghezza , sia l' orizzontale .

Dividasi la SZ in parti eguali quante si voglia , ed immaginiamo nel piano geometrico una retta normale in S alla fondamentale , la quale proceda dalla parte posteriore del quadro .

Siano trasportate sopra di essa le medesime divisioni S 1 , 12 , 23 ec. In oltre pei punti di quelle divisioni passino altrettante rette paralelle alla linea fondamentale X Z, e fingiamo di dover descrivere le prospettive di quelle rette .

Pongo *o s* eguale al raggio principale, e pei punti 1, 2, 3 ec., nei quali è divisa la SZ, conduco le rette *s*1, *s*2, *s*3, ec., che seghino in 1, 2, 3 ec. la S *o* .

Per quei punti 1, 2, 3 ec. facendo passare le rette *fg*, *de* , *bc* ec. paralelle alla XZ ; dico che saranno le prospettive domandate .

Imperciocchè fingiamo che il piano dei due triangoli *s o* 1 , 3 S 3 , rotando intorno alla S*o* , si rechi in posizione perpendicolare al quadro , sì che il punto *s* cada nel punto di vista . Allora i punti 1, 2 , 3 ec. cadranno sopra le divisioni dell' immaginata retta normale in S alla X Z ; ed in conseguenza le prospettive di que' punti cadranno in 1, 2, 3 rispettivamente . Adunque per 1, 2, 3 ec. passar devono le prospettive delle corrispondenti rette paralelle alla XZ , che abbiamo immaginato essere descritte nel piano geometrico ,

posteriormente al quadro. Ma le dette prospettive sono paralelle alla XZ, §. 37; dunque non potranno essere diverse dalle *fg*, *de*, *bc* ec.

Ciò posto, fingiamo un punto che abbia la distanza S1 dal piano del quadro, e giaccia nel piano geometrico. È chiaro, per ciò che fu mostrato superiormente, che la prospettiva di questo punto dev' essere nella retta *fg*.

Abbia in oltre la declinazione eguale ad S2; e la prospettiva del punto medesimo dovrà essere nella retta *o*2 che unisce i punti *o*, 2, §. 31. Adunque la prospettiva di quel punto sarà in *p*, ove si tagliano le *fg*, *o* 2.

Fingiamo ora che quel punto, del quale abbiamo determinata la prospettiva in *p*, sia sul piano geometrico la projezione d' un punto dato nello spazio, del quale conosceremo per conseguenza l' altezza.

Intanto è manifesto, §. 37, che la prospettiva di questo punto si deve trovare in una retta elevata dal punto *p* perpendicolare alla *fg*. In oltre, se ponghiamo la 2A perpendicolare alla XZ nel punto 2, e si faccia eguale all' altezza nota, sarà A la projezione retta sul quadro del punto accennato; e nella retta che unisce i punti *o*, A dev' essere la sua prospettiva, §. 31. Questa sarà dunque in *a* dove si tagliano la normale *pa'*, e la *o* A. Osserviamo che S 2, essendo la declinazione vera, 1*p* è l' apparente; e che la 2 A alla *pa*, è come la S 2 alla 1*p*; e quindi come la 2A alla S 2, così la *ap* alla *p* 1.

Adunque, dividendo la *p* 1 in tante parti eguali, in quante è divisa la S 2, se di quelle parti formeremo una scala su la retta 1*g*, come delle parti S1, 12, 23 ec. è formata la scala S Z, l'unità di questa scala all'unità della scala *fg* sarà come la dimensione A 2 alla corrispondente dimensione *ap*; e perciò tante parti e frazioni della scala *fg* sarà la dimensione *ap*, quante parti e simili frazioni è la dimensione A2 della scala SZ. Dal che si vede come si possa facilmente determinare la posizione e la lunghezza del-

la retta *pa*, e quindi la prospettiva *a*; non solo con esattezza geometrica, ma ancora con approssimazione giudicata ad occhio, allorchè sia preparata sul margine X Z del quadro la scala S 1 2 3 ec., tanto dall'una, quanto dall'altra parte, per le misure delle declinazioni positive e negative, ed in oltre la scala delle digradazioni S 1 2 3, ec. sopra la verticale.

Quel che si è detto supponendo che il punto *p* cada nella *fg*, si dirà egualmente se cada in una delle altre *de*, *bc*, ec., avendo rispettivamente le distanze S2, S3, ec.; cioè, se cade nella *de*, in essa dovremo formare la scala per misurare l'altezza corrispondente $\pi\alpha$, dividendo la 2π in tante parti eguali in quante è divisa la S2, e formando di quelle parti la nuova scala, su la quale prenderemo la dimensione $\pi\alpha$ di tante parti e frazioni, di quante parti e simili frazioni su la scala SZ è la dimensione 2 A; la quale, come è manifesto non sarà necessario descrivere sul quadro.

Quelle successive scale che supponghiamo formate sopra le *fg*, *de*, *bc* ec., composte di parti continuamente-decrescenti, si chiamano *scale digradate*; e per avere preparata la misura dell'unità competente a ciascheduna di esse, ponghiamo a parte, o sul margine verticale del quadro, la misura T Z eguale alla S*o*, e la ZY eguale alla dimensione S 1, che rappresenta l'unità della scala primitiva SZ. Condotta la T Y, se prolungheremo le *bc*, *de*, *fg* ec., finchè seghino in III *r*, II *n*, I *m* ec. il triangolo rettangolo TZY, sarà I*m* l'unità della scala *fg*; II *n* sarà l'unità della scala *de*; III *r* l'unità della scala *bc*, ec. Quando le altezze fossero state riferite ad un piano orizzontale condotto per l'occhio, in vece di applicare la misura 2A si dovrebbe applicare la A' A riferita all'orizzontale *s o* A'; e descriverebbesi egualmente la *o* A, che determina il medesimo punto *a*, prospettiva del punto dato.

Nella costruzione così variata si riscontra che S 2, declinazione vera, ad 1 *p*, declinazione apparente, sta come A'A, altezza vera, ad *a'a*, altezza apparente, §§. 33, 34.

§. 43. Per quelle prospettive che dovessero cadere al di sotto della XZ conviene prolungare la scala delle digradazioni sulla verticale *o* S. Ciò si farà conducendo per *s* e pei punti 1, 2, 3 ec., nei quali è divisa la SX, come la S Z, altrettante rette che vadano ad incontrare il prolungamento della *o* S oltre S, come la retta S 1 che incontra in 1 il detto prolungamento; e condotta per 1 la *h k* paralella alla X Z, sarà dessa *h k* una delle rette spettanti alla serie *b c*, *d e*, *f g* ec., e si farà di essa quell' uso che abbiamo veduto doversi far delle altre.

§. 44. Le projezioni orizzontali dei punti obbiettivi potrebbero essere riferite ad un piano orizzontale superiore al punto di vista, come quando si vogliono descrivere le prospettive di oggetti veduti dal basso all' alto.

Fingiamo che l' intersecazione di questo nuovo piano col quadro sia la retta X' Z'. Essa potrà essere considerata come una nuova fondamentale, ed S' *o* come la nuova verticale. Ciò posto, opereremo rispetto alla X' Z', ed alla *o* S', come fu mostrato doversi operare rispetto alla X Z, ed alla *o*S. La figura stessa mette in chiaro la pratica relativa a questo avvertimento.

§. 45. Dalla teoria delle scale digradate proviene quell' apparecchio prospettico che si chiama *graticola*, e forse meglio sarebbe detto *reticola*.

Fingiamo un rettangolo 4 P Q R, il quale contenga l' icnografia dell' oggetto che si vuole rappresentare in prospettiva. X Z sia la fondamentale; *o* il punto principale; *o s*, paralella alla X Z, sia la misura del raggio principale. Fig. 16

Dividasi in parti eguali il lato 4 R, ed in parti eguali alle prime il lato 4 P; indi siano condotte per le divisioni del primo lato altrettante rette paralelle al secondo, e per le divisioni di questo altrettante paralelle al primo; onde tutta l' area del supposto rettangolo sarà divisa in quadrati, prolungando, se sarà mestieri, il lato 4P ed il corrisponden-

te QR, perchè contengano un numero intero di parti eguali, l' una all' altra.

Se per le divisioni del primo lato condurremo altrettante rette 1 *o*, 2 *o*, 3 *o* ec. al punto principale *o*, saranno prospettive corrispondenti a quelle rette che dai medesimi punti furono condotte paralelle al secondo lato, §. 37.

Ora conduciamo pel punto *s* ai punti 3, 2, 1, ec. le rette *s* 3, *s* 2, *s* 1 ec., le quali seghino in *m*, *n*, *r* ec. la verticale, e pei punti *m*, *n*, *r* ec. conduciamo paralelle alla X Z le rette 1 *g*, 2 *e*, 3 *c* ec., le quali è chiaro, §. 37, che saranno prospettive di quelle rette, che per le divisioni del secondo lato furono condotte paralelle al primo. Laonde il trapezio 4*pq*R sarà prospettiva del rettangolo 4PQR, e ciascheduno dei piccoli trapezj nei quali è diviso il grande 4*pq*R corrisponderà ad uno dei piccoli quadrati nei quali è diviso il rettangolo 4PQR.

Sia descritto nell' area di questo rettangolo un contorno A B C D; e sarà facile assegnare, o esattamente, o prossimamente ad occhio, la prospettiva di esso entro al trapezio 4*p q* R così reticolato.

Imperciocchè la prospettiva del punto D dev' essere nella quinta orizzontale *p q*, che rappresenta la P Q, e dividere prossimamente per mezzo il quinto spazio, principiando a numerare dalla sinistra verso la destra. Assegneremo dunque la detta prospettiva in *d*; così il punto C avrà la sua prospettiva nella quarta orizzontale ed all' estremo del sesto spazio. Perciò porremo quella prospettiva in *c*.

Similmente proseguendo per tutti gli altri punti si assegnerà con molta agevolezza la prospettiva di ciascheduno; onde potremo descrivere il contorno *a b c d*, che è prospettiva del dato A B C D.

Se sui punti A, B, C, D insistano spigoli verticali del dato oggetto, dei quali sarà, per conseguenza, nota la lunghezza, o se quei punti medesimi siano, sul piano geometrico, projezioni di altrettanti punti obbiettivi, dei quali conoscia-

mo le altezze, le prospettive trovate a, b, c, d ec. ci serviranno a determinare quelle dei dati punti obbiettivi, o dei lati verticali dell' oggetto proposto, come servì, §. 42, il punto p a determinare il punto a e la retta pa.

ESEMPIO.

ABCD. Pianta, o icnografia dell' edificio che vuolsi rappresentare in prospettiva col metodo ora esposto. Fig. 17

Il profilo $\alpha\gamma\mu$X somministrerà le misure delle altezze.

Il punto principale si pone in o; e quindi poq è l' orizzontale. In essa si pone la lunghezza del raggio principale, che non capisce nella tavola.

Nel punto a abbiamo la prospettiva del punto A. Per determinarla con tutto rigore si può condurre una perpendicolare Aa' sopra la XZ, e dal punto a' una retta al punto o, nella quale sarà la cercata prospettiva, essendo essa retta la projezione del raggio visuale relativo al punto A, §. 31. Ciò fatto, si ponga la a' A' eguale alla a' A, e si conduca una retta dal punto A' al punto estremo del raggio principale che supponghiamo nella oq; quella retta segherà la retta precedentemente condotta dal punto a' al punto o, ed il punto d'intersecazione a sarà la dimandata prospettiva, §. 32. Ma senza tanto rigore si può segnare il punto a ad occhio nel trapezio corrispondente al quadrato $higk$ che contiene il punto A, osservando che siccome il punto A giace presso a poco egualmente lontano dai due lati hi, gk, così la prospettiva a sopra la retta $a'o$ si dovrà trovare alcun poco più vicina al lato superiore che all' inferiore del trapezio corrispondente al detto quadrato $hgki$; imperciocchè una retta paralella alla fondamentale che fosse condotta fra le due hi, gk egualmente distante da ciascheduna di esse, avrebbe la sua prospettiva più vicina al lato superiore che all' inferiore del trapezio menzionato, come si vede dalla costruzione insegnata nel §. 44.

Il punto C cade a capello sul termine 5; onde la sua prospettiva sarà esattamente in *c*, come abbastanza chiaro si vede nella figura.

Laonde nella retta condotta dal punto *a* al punto *c* avremo la prospettiva di quella che è condotta da A a C. Similmente ragioneremo sopra la determinazione del punto *d*, che è prospettiva del punto D.

Producendo le *ac*, *ad* ad incontrare l' orizzontale, la prima colla sua intersecazione determinerà il punto accidentale di tutte le rette paralelle alla AC, e la seconda determinerà il punto accidentale di tutte le rette paralelle alla AD; dei quali punti è comodissimo l'uso nel proseguimento dell' operazione, §. 37.

In fatti se determineremo le prospettive di quei punti, ne' quali si congiungono ad angolo retto gli spigoli paralelli alla AC con quelli che son paralelli alla AD, da quelle prospettive conducendo ai relativi punti accidentali altrettante rette, in esse avremo le prospettive degli spigoli anzidetti.

Sia L la projezione del punto ove si congiungono i due spigoli superiori del cimazio che deve correre sopra gli archi.

Troveremo col metodo già indicato la prospettiva del punto L, e da quella prospettiva innalzeremo una verticale, di cui si potrà assegnare la sommità *l* per approssimazione, con questa norma, che la lunghezza di essa verticale contenga tante unità e frazioni della scala digradata corrispondente alla linea 1*hi*, quante unità e frazioni della scala primitiva conterrà l' altezza X Y. Come si ragiona intorno a questo punto *l*, si ragioni pure sopra ciascun altro, e si operi similmente.

Intanto dal punto *l* al punto *p*, che è il punto accidentale degli spigoli paralelli alla AD, si tiri una retta; ed in essa avremo la prospettiva dello spigolo superiore paralello alla stessa AD. Così dal punto *l* al punto accidentale degli spigoli paralelli alla AC si tiri una retta, in cui sarà la prospettiva dell' altro spigolo superiore paralello alla AC.

Si

Si opera similmente per tutte le altre linee, e gli altri punti; nè fa mestieri ch' io mi estenda a spiegare più lungamente con parole ciò che si esprime, per quanto credo, abbastanza dalla figura.

§. 46. Senza aggiugnere altre dichiarazioni alle regole esposte, esse bastano per descrivere la prospettiva di qualunque data linea, e di qualunque solido che sia terminato da faccie piane.

Ma quando sia proposto un oggetto terminato da una sola superficie continua, allora l'esatta descrizione della sua immagine richiede che sia prima determinato il contorno apparente relativo alla posizione reciproca dell'oggetto, e dell' occhio, affinchè poi descrivendo la prospettiva di questo contorno, si ottenga l' immagine cercata.

Il principio generale da cui deriva questa regola fu spiegato nel §. 3, ed il metodo per determinare il detto contorno è quel medesimo che accennai nel §. 88, P. I, innanzi di applicarlo particolarmente all' ipotesi che la superficie proposta sia di rotazione.

Ciò nulla ostante esamineremo quì un esempio a fine di rendere più chiaro questo punto, che non è di lieve importanza per la pratica, ed avremo occasione di mostrare come talvolta si accorci l' operazione con qualche pronto espediente approssimativo.

Fingo di dover descrivere la prospettiva dell'ovolo d'un capitello; ed esprimo intanto la sua projezione sopra il piano geometrico nel circolo RPQ, il cui centro è C. Fig. 18

L' altro circolo concentrico $\mathcal{R}\,\mathcal{P}\,\mathcal{Q}$ rappresenti su quel piano medesimo la projezione della base inferiore che termina l' ovolo. Pongasi, per maggiore semplicità nel punto S il punto di stazione, ed insieme il punto di vista, supponendo che il detto piano geometrico passi pel punto di vista; e sia *o* il punto principale. Poste queste cose descrivasi la retta SCR, e per essa fingasi condotto un piano perpendicolare al piano geometrico, e secante la superficie dell' ovolo. Cotesto piano, rotando intorno alla SR, venga a porsi nel

piano geometrico, e porti in se descritta la sezione dell' ovolo, la quale sarà rappresentata dalla figura *m n r k*.

Per descrivere con rigore geometrico il contorno apparente, si concepirà compiuta tutta la superficie di rotazione, cui appartiene la parte convessa della proposta figura, ed il problema diverrà quel medesimo che fu proposto in modo astratto nel citato §. 88, P.I. Nulla dunque aggiugnerò su questo proposito, giacchè, determinato il contorno apparente di tutta la detta superficie, sarà facile discernere qual parte spetti alla superficie convessa dell' ovolo, e di quella parte si descriverà la prospettiva.

Ma l' accennata parte del contorno apparente che spetta a tutta la superficie di rotazione, non racchiuderà tutto ciò che si vede dell' ovolo. La porzione rimanente del contorno apparente di questo solido consisterà in un arco del circolo massimo, o della base superiore, dalla quale esso ovolo è terminato.

Conduciamo pel punto S le rette S P, S Q tangenti il circolo RPQ, e la retta S*t* tangente il semicircolo *r t k* nel punto *t*. Producasi la corda P Q fino a segare in *p* la retta *nr*; e dal punto *t* condotta una normale in T sopra la SR, descrivasi ancora la retta *p t*. Il contorno apparente dell' ovolo sarà dunque composto di due parti differenti, una delle quali è l'arco circolare projettato in PHQ, sul piano geometrico, e nella retta *p n* su quel piano che abbiamo immaginato essere perpendicolare al detto piano geometrico, passando per la retta S R. L' altra parte spetterà a quella curva di doppia curvatura che abbiamo già considerato, §.88, P.I; e la projezione di questa parte, sul piano geometrico, sarà una curva che passerà pei tre punti P, T, Q, toccando in P, ed in Q il circolo PRQ. La projezione poi sull' altro piano passerà per *p*, e per *t*.

Dopo aver conceputa esattamente in questo modo la vera forma del contorno, sostituiremo alla seconda parte di esso una semiellisse, della quale un asse sia la retta projet-

tata in PQ, e nel punto *p*; ed il semiasse conjugato sia la retta projettata nella GT, e nell'altra *p t*.

Questa sostituzione recherà molta agevolezza in pratica, senza cagionar sensibile alterazione nella figura dell'immagine, come ognuno potrà chiarirsi, costruendo la detta curva di doppia curvatura, e paragonando la sua prospettiva a quella dell'ellisse. Ma vuolsi avvertire che noi supponghiamo non molto grande l'angolo formato dalle due tangenti SP, SQ; onde la corda PQ non sarà molto distante dal diametro: condizioni che si accordano con le ordinarie pratiche di prospettiva.

Ciò posto la risoluzione del problema, così modificato, si riduce a trovare prima la prospettiva dell'arco circolare projettato in PNQ, e nella retta *pn*; poi quella della semiellisse projettata nell'altra PTQ, e nella retta *pt*.

Per ottenere la prima parte si potrebbe descrivere l'intera prospettiva del circolo projettato in PRQN.

Questa prospettiva sappiamo che, in generale, dev'essere un'ellisse; ma quì giova osservare che il centro di essa non sarà prospettiva del centro del dato circolo obbiettivo, come sarebbe se si trattasse di prospettiva paralella (1). Non avendo dunque cognizione immediata di quel punto, la cui prospettiva sarà il centro dell'ellisse menzionata, converrà investigarlo con qualche ragionamento.

Si osservi che la superficie del cono visuale essendo toccata da due piani normali al piano geometrico, ed eretti sopra le due PS, QS, ancora il circolo obbiettivo sarà toccato da essi piani; e quindi la sua prospettiva sarà in contatto con le due rette, le quali dai punti P', Q' si eccitano perpendicolari alla fondamentale XZ nel piano del quadro. Ma quelle due rette sono paralelle fra loro. Adunque i punti nei quali toccheranno l'accennata ellisse debbono essere estremi di un suo diametro (2).

---

(1) Vedi Sezioni Coniche. (2) Vedi Sezioni Coniche.

Ora osserviamo che nella prima normale elevata dal punto P' non può essere altro punto dell' ellisse fuorchè la prospettiva del punto projettato in P; e nell'altra normale elevata dal punto Q' non può essere altro punto dell'ellisse medesima fuorchè la prospettiva del punto projettato in Q. Adunque la prospettiva della retta projettata in PQ sarà diametro dell'ellisse che è prospettiva del circolo projettato in PRQN. Perciò la prospettiva dell' arco projettato in PNQ sarà una semiellisse descritta sul diametro pq, essendo p, q prospettive dei punti projettati rispettivamente in P, Q.

Sarà dunque determinato il centro della detta ellisse nel punto γ, che divide per mezzo la retta pq; e quindi il diametro conjugato di pq sarà nella retta $\gamma\gamma'$, condotta per γ perpendicolare alla fondamentale X Z.

Ma il punto obbiettivo corrispondente alla prospettiva γ dev' essere projettato sul piano geometrico nella retta P Q.

Deve poi trovarsi ancora la sua projezione in quella retta che sia condotta per S e per γ', §. 38.

Adunque sarà quel punto projettato in Γ, ove si tagliano scambievolmente le due rette PQ, $S\gamma'\Gamma$.

Consideriamo ora che la retta H Γ è projezione d' una retta obbiettiva costituita nel piano del circolo projettato in PRQH, e che la prospettiva di essa retta deve trovarsi nella $\gamma\gamma'$. In oltre la prospettiva del punto projettato in H deve appartenere al contorno dell'ellisse sopra indicata. Adunque la prospettiva della retta projettata in HΓ sarà il semidiametro conjugato corrispondente al diametro pq.

Ciò posto, si trovi la prospettiva χ del punto projettato in H, del quale conosciamo l' altezza vera C c; e descritta la retta $\gamma\chi$, descrivasi ancora la semiellisse $p\chi q$, la quale sarà prospettiva dell' arco circolare projettato in PHNQ.

Per compiere la prospettiva del contorno apparente, è d' uopo descrivere un' altra semiellisse sul medesimo diametro pq, ma con diverso semidiametro conjugato. Questo semidiametro deve poi essere nella $\gamma\gamma'$; perciò basterà trova-

re la prospettiva del suo estremo nel quale incontra la rispettiva ellisse.

Producasi a quest' effetto la retta H Γ, fino che incontri in T' la semicirconferenza ellittica P T Q, e sarà determinata nel punto T' la projezione di quel punto, la cui prospettiva sarà l' estremo richiesto del semidiametro conjugato di *pq*. Imperciocchè è manifesto che una retta terminata ne' punti Γ, T' è projezione d' un' altra retta secante la semiellise projettata in PTQ sul piano geometrico, e nella retta *pt* sull' altro piano verticale. Adunque la prospettiva del punto projettato in T' sarà nel contorno della semiellisse prospettica che dobbiamo descrivere. Elevata per tanto una retta paralella alla C*c*, che dal punto T' vada ad incontrare la *pt* in *t'*, sarà così determinata l' altezza apparente del punto projettato in T'.

Potremo quindi determinare la prospettiva τ di quel punto; e con ciò sarà determinato il semidiametro $\gamma\tau$ che si cercava; onde descritta la semiellisse $p\tau q$, compiremo la prospettiva $p\chi q\tau$ del contorno apparente.

Ma dentro alla figura $p\chi q\tau$ deve apparire ancora la prospettiva del circolo minore, o inferiore, che è base dell' ovolo, e la cui projezione è il circolo $\mathcal{P}2\mathcal{R}$ sul piano geometrico, e la retta *mk* sul piano verticale.

Cotesta prospettiva è pure un' ellisse, della quale determineremo un diametro conducendo le tangenti S 2, S $\mathcal{P}$, e trovando le prospettive p', q' dei punti projettati ne' due $\mathcal{P}$, 2, rispettivamente.

Trovato il diametro $p'q'$, il suo conjugato si potrà determinare col ragionamento, e col metodo col quale abbiamo trovato i due semidiametri $\gamma\chi$, $\gamma\tau$.

Laonde descriveremo l' ellisse $p'\chi'q'\tau'$, prospettiva del circolo projettato in $\mathcal{P}2\mathcal{R}$.

§. 47. Dopo queste avvertenze si potrà eseguire la costruzione della prospettiva che rappresenti un capitello, come dimostra la Fig. 19, nella quale adopero il metodo spie- Fig. 19

gato dal §. 38, per dare anche di questo un esempio.

Esprimo nel contorno $\lambda\mu\nu\gamma$ il profilo del capitello proposto, ed in ABGDC la sua projezione sul piano geometrico. In *o* è posto il centro del quadro: in S il punto di stazione: nella retta *sou* rappresentasi l'orizzontale: nella XZ la fondamentale: nella S' *o* la verticale. Il punto *u* sarà il punto accidentale delle linee paralelle alla BC, e si omette il punto accidentale delle altre paralelle alla AB, perchè non può capire nella tavola. Nel punto *b* è la projezione retta sul quadro del punto projettato in B sul piano geometrico. Così *g* è sul quadro la projezione retta del centro che sul piano geometrico è projettato in G, ed appartiene alla sezione del tronco della colonna, su cui posa il capitello. La costruzione relativa ai due punti ora accennati è compiuta nella figura; onde si potrà chiaramente argomentare ciò che dee farsi per ottenere le prospettive di tutti gli altri punti col metodo del §. citato.

Fig. 20 §. 48. Applichiamo ad un facile esempio anche il metodo proposto nel §. 39.

ABCD sia sul piano geometrico la projezione d'un paralellepipedo, che dev' esser base d'un altro projettato in EFGH. Le altezze dei punti da determinare in prospettiva si conosceranno dal profilo *mknr*. XZ è, secondo il solito, la fondamentale: *o* il punto principale: *o* O la lunghezza del raggio principale.

La B'β eguaglia la B'B, cioè la distanza del punto obbiettivo B dal quadro. La B'*o* è projezione retta del raggio visuale corrispondente a questo punto obbiettivo. La retta β *b* è indirizzata al punto O. Adunque *b* è la prospettiva del punto B. Similmente abbiamo *c* prospettiva del punto C; e quindi è determinato il punto *p* che è il punto accidentale delle rette paralelle alla B C. La verticale B'β' eguaglia l'altezza del punto superiore al punto B, e projettato pure in B. La $\beta'\beta''$ eguaglia la B'B, e la retta $\beta''b'$ è indirizzata al punto O. Adunque b' è la prospettiva del detto punto superio-

re. Similmente progrediremo alla determinazione degli altri punti.

Si osservi che ancora la retta verticale condotta per b deve passare per b', come segue dal §. 37. Adunque, condotta la verticale $b\,b'$ per la prospettiva b precedentemente trovata, il punto b' poteva determinarsi egualmente conducendo l'una, o l'altra delle $\beta' o$, $\beta'' O$ a segare la $b\,b'$.

§. 49. Con la Fig. 21 intendo di mostrare un esempio del metodo che fu spiegato nel §. 40. Fig. 21

In ABCDE si rappresenta la pianta d'una scala; $mnrVs$ è il profilo, dal quale sono indicate le altezze.

Nel punto A son projettati ambedue i termini d'uno spigolo verticale. Avremo in p la projezione del termine inferiore, ed in a quella del termine superiore sul piano che s'intende perpendicolare al piano geometrico. Dirigendo dal punto A al punto S la retta AA', si ottiene la declinazione apparente di ambedue que' punti ora indicati. Dirigendo al punto O la $a\,a'$ e la $p\,p'$, si ottengono le altezze apparenti Zp', $Z\,a'$. Adunque con le due misure S'A', Zp' otterremo, secondo il metodo citato, la prospettiva α del punto inferiore A.

Similmente determinata la declinazione apparente S'B' e l'altezza apparente $Z\,q'$ del punto B, otterremo la sua prospettiva β; e quindi la retta $\alpha\beta$ sarà prospettiva della AB. Dirigiamo ora al punto S la E E' per trovare la declinazione apparente S'E' relativa al punto E, e fatta la S''3 eguale alla S'E', si elevi la verticale $3\,\varepsilon$ che seghi in ε la $\alpha\beta$. Avremo così determinata la $\alpha\varepsilon$ prospettiva della AE.

Similmente progrediremo a determinare le prospettive di tutti gli altri punti che sono nel piano geometrico, uno dei quali è il punto C, la cui prospettiva sarà in γ. Nè sarà men facile l'operazione relativa ai punti sublimi. Consideriamo quello che è projettato in B sul piano geometrico, la cui corrispondente projezione retta sul piano verticale è

in b''. Adunque la sua altezza apparente si otterrà eguale alla $Z\,b'''$. Si porti questa misura sopra la verticale 2β da 2 in β'; e sarà β' la prospettiva cercata.

Non si ometterà di determinare il punto q, cioè il punto accidentale di tutte le rette paralelle alla BC; e intendasi lo stesso del punto accidentale relativo a quelle che sono paralelle alla AB, il quale per le condizioni della nostra figura, non può capire nella tavola.

Per evitare la descrizione delle rette concorrenti ai punti S, ed O, dalle quali, rispettivamente, sono determinate le declinazioni, e le altezze apparenti, è manifesta la maniera con cui ci potremo giovare dell' espediente insegnato nel §. 41.

Molte abbreviazioni, e molti particolari artificj si presentano nella pratica, delle quali cose, l' uso è il solo maestro. Troppo lungo e nojoso assunto sarebbe il condurre la mano del principiante nelle più minute operazioni a forza di esempj e di parole. S' egli ha intesi i principj, e se con diligenza e fervore vorrà por mano alla pratica, con leggerissimo ajuto d' un maestro, ed ancora da se solo, potrà divenir, senza grandissima, nè troppo lunga fatica, abbastanza abile per disegnare ogni prospettiva.

CAPITOLO IV.

Problemi.

§. 50. Quando un si fa a vedere qualche disegno prospettico, raro è che si trovi coll' occhio in quel punto di vista al quale fu riferita la descrizione. E se questa non contenga immagini di oggetti che abbiano certe forme particolari, e certe condizioni di grandezza e di posizione cognita indipendentemente dal disegno, impossibil cosa è, in generale, trovare il detto punto con geometrica precisione.

Per guardare, a cagion d' esempio, un quadro, ove non siano linee rette, e si rappresentino solo alberi animali, rupi,

pi, e simili cose, noi sceglieremo bensì un certo luogo d' onde crederemo di poter vedere con maggior comodo, e con più bell' effetto il dipinto; ma sarà impossibile determinare geometricamente quel punto, al quale è stata riferita cotesta rappresentazione prospettica.

Questo problema si può risolvere talvolta, quando le prospettive rappresentano oggetti terminati da rette linee, e sian note certe condizioni della posizione loro; come avviene in quelle prospettive che rappresentano cornici, ed altre parti architettoniche, ove distinguiamo quali linee obbiettive esser debbono verticali, e quali orizzontali, e gli angoli che possono comprendere, e così fatti indizj.

Abbianvi per tanto nella prospettiva supposta due rette A a, B b, le quali rappresentino due rette distinte nell' oggetto, e sia noto che queste rette obbiettive debbon essere fra loro paralelle. Similmente supponghiamo due altre prospettive A α, B β corrispondenti a due rette obbiettive, pure fra loro paralelle, le quali rispettivamente comprendano con le prime rette indicate gli angoli che si rappresentano in a A α, b B β. Di nuovo siano A γ, B δ prospettive di altre due rette fra loro paralelle; ed in oltre sia nota la misura dell' angolo obbiettivo rappresentato dall' angolo prospettico a A α, e dell' altr' angolo obbiettivo rappresentato dal corrispondente angolo prospettico a A γ. Fig. 22

Io dico che con questi dati si può determinare una linea, ove giaccia il punto di vista.

Imperciocchè si producano le due A a, B b a concorrere nel loro punto accidentale P; così le B β, A α producansi a concorrere nel loro punto accidentale p; e parimente le A γ, B δ, producansi a concorrere nel loro punto accidentale Q.

Se pel punto di vista, qualunque sia la sua posizione ignota, fingiamo condotte due rette, una al punto P, l'altra al punto p, sappiamo che queste due rette debbono comprendere un angolo eguale a quello che si rappresenta dall'

angolo prospettico $b B \beta$, ovvero dall' altro $a A \alpha$; mentre la prima delle due rette accennate sarà paralella alle obbiettive delle due $A a$, $B b$, e la seconda sarà paralella alle obbiettive delle due $A \alpha$, $B \beta$, §. 37.

Ciò posto, se noi descriveremo sopra la retta $P p$ un segmento di circolo $P R p$ capace di quell' angolo, e fingeremo che il detto segmento circolare roti intorno alla $P p$, come suo asse, l'arco $P R p$ passerà pel punto di vista; cioè questo punto si troverà nella superficie che l' arco genera intorno all' asse $P p$.

Con simile discorso provasi che, descritto sopra la retta $P Q$ un segmento di circolo capace dell' altr' angolo noto, il quale si rappresenta nell' angolo prospettico $a A \gamma$, ovvero nell' altro $b B \delta$, il punto di vista si deve ritrovare nella superficie di rotazione generata dall' arco di quel segmento intorno all' asse $P Q$. Adunque il punto di vista è nella linea d' intersecazione fra le due menzionate superficie. Che se la retta corrispondente alla prospettiva $A \gamma$ si trovi nel piano dell' angolo rappresentato in $a A \alpha$; e per conseguenza, ancora la retta corrispondente alla prospettiva $B \delta$ si trovi nel piano dell' angolo rappresentato in $b B \beta$, il punto accidentale Q dovrà cadere nella retta $P p$, come per esempio, in Q'; ed allora le due superficie di rotazione, avendo l' asse comune $P p$, si taglieranno in un circolo, il cui raggio sarà eguale alla retta $R O$ condotta normale alla $P p$ dal punto R, dove si taglieranno scambievolmente gli archi dei due segmenti circolari.

Sussistendo l' ipotesi che le rette obbiettive corrispondenti alle $A \gamma$, $B \delta$ non giacciano ne' rispettivi piani degli angoli rappresentati in $a A \alpha$, $b B \delta$, se ponghiamo ancora noto l' angolo obbiettivo rappresentato dall' angolo prospettivo $\alpha A \gamma$, o dall' altro $\beta B \delta$, verrà determinata un' altra superficie di rotazione, in cui si deve trovare il punto di vista.

Perciò questo punto sarà uno di quelli che pos-

sono esser comuni alle tre accennate superficie di rotazione.

Sarebbe dunque necessario alcun altro dato per definire quale, fra i detti punti, sia quello al quale è stata riferita la descrizione.

Ma se il punto Q cadrà nella retta Pp, è chiaro che la misura dell' angolo obbiettivo rappresentato in α A γ, ovvero in β B δ, dipende dalla misura di quello rappresentato in a A γ, ovvero in b B δ; onde la cognizione dell' uno porta con se necessariamente quella dell' altro; e perciò dalla misura di quest' ultimo non potremo ricavare un nuovo dato.

In fatti se fosse descritto sopra la Q' P il segmento capace dell' angolo, che nel caso ora supposto, sarebbe rappresentato in Q' A P, ovvero in Q' B P, esso segmento passerebbe col suo arco pel medesimo punto R, ove si tagliano i due precedenti.

Pertanto, fingendo di aver trovato che il punto di vista è nella circonferenza descritta dal raggio R O, col centro O, intorno all' asse Pp, supponghiamo che nel modo stesso col quale fu determinata la Pp, ed il punto R, si possa per altri nuovi dati determinare un' altra retta P'p', ed un altro punto R'; onde conoscasi che il punto di vista dev' essere ancora in una circonferenza circolare descritta col centro O', e col raggio O' R' intorno all' asse P'p'. È manifesto che il punto principale sarà in o, dove scambievolmente si tagliano le due rette R O, R' O'.

La lunghezza del raggio principale, cioè la distanza del punto di vista dal quadro, sarà tosto determinata per le due rette O o, O R, ovvero per le due o O', O' R'. Imperciocchè quella lunghezza deve eguagliare il cateto d' un triangolo rettangolo, del quale O R sia l' ipotenusa, ed O o l' altro cateto, o pure, di cui l' ipotenusa sia O' R', e l' altro cateto O' o.

È pur manifesto che l' angolo acuto del primo triangolo, il quale si formerà in O, sarà misura dell' inclinazio-

ne che hanno, rispetto al quadro, i piani degli angoli obbiettivi rappresentati dai due angoli prospettici a A α, b B β.

§. 51. Da ciò si vede che se, oltre alle misure degli angoli rappresentati rispettivamente in PAp, P A Q' conosceremo ancora l'inclinazione scambievole del quadro col piano ove giacciono i detti angoli, questo secondo dato potrà supplire a quelli, pei quali fu determinata la retta R'O'o.

Imperciocchè troveremo che la retta Oo, come cateto; la RO, come ipotenusa; ed il raggio principale, come altro cateto, formano un triangolo rettangolo in o, del quale l'angolo acuto in O eguaglia il dato angolo d' inclinazione del menzionato piano obbiettivo col piano del quadro.

Se dunque il piano obbiettivo sia perpendicolare al quadro, il punto principale cadrà in O, ed il raggio principale sarà O R.

Fig. 23 Sia data per esempio la prospettiva A, che rappresenta un portico. Le linee rappresentanti gli spigoli della cornice, degli zoccoli, ec., sono tutte orizzontali. Adunque le loro prospettive concorrer debbono nella linea orizzontale, §. 37. Per tanto, se P è il punto accidentale delle rette ab, cd, ciò vuol dire che la linea orizzontale passa per P; e perciò, condotta da questo punto una retta PT, indefinitamente prolungata dall'una e dall'altra parte, e paralella alla fondamentale, cioè perpendicolare alle rette verticali che son nel disegno, come la af, sarà in essa PT il punto principale.

Per assegnare la posizione di questo punto, produrremo prima la prospettiva $h\,d$ d' uno spigolo spettante all' altra faccia della cornice, e trovata la sua intersecazione p con la PT, si descriverà sopra la Pp, come diametro, il semicircolo PRp; giacchè supponghiamo che l' angolo formato dalle obbiettive delle cd, dh sia retto.

Ma ciò non basta ancora perchè sia determinato il punto principale.

Osserviamo dunque che se producansi le Pq, $p\,r$ a se-

garsi scambievolmente in *s*, quella retta *su*, che unirà i punti *s*, *u*, formerà un angolo *usq*, che sarà prospettiva d' un semiretto; imperciocchè supponghiamo, secondo le regole dell' architettura, che la distanza fra due pilastri prossimi sia la stessa tanto dall' uno, quanto dall' altro lato del portico. In oltre il piano di quell' angolo semiretto sarà orizzontale, perchè orizzontali sono le rette che lo comprendono.

Producasi dunque la *su* a segare in V la PT; e sopra la retta PV si descriva un segmento circolare capace dell' angolo semiretto.

Accaderà l' intersecazione R; e se da questo punto sarà condotta la R*o* perpendicolare in *o* alla PT, sarà determinato in *o* il punto principale, e nella lunghezza R*o* la misura del raggio principale.

§. 52. Posto tutto ciò che abbiamo determinato nel §. 50, e della Fig. 22 considerando sol tanto le cose notate con le medesime lettere nella Fig. 24, fingiamo che sia data la lunghezza vera della retta rappresentata dalla prospettiva A*a*; e si voglia determinare la posizione di questa retta obbiettiva. Fig. 24

Descrivansi le rette R*a*M, RAN indefinite di lunghezza, e pel punto A sia condotta la A*s* paralella alla PR, procedente dalla parte *a* per rispetto alla RA, ed eguale alla lunghezza nota. Per *s* conducasi paralella alla RA la *s*M, che incontri in M la R M. Finalmente si tiri M N paralella ad *s*A, e prolunghisi ad incontrare in T la *a* A. Conduciamo per T la retta *t* T paralella alla P*p*, e fingiamo che il triangolo P R*p*, roti intorno alla P*p* finchè il punto R coincida col punto di vista, §. 50; indi il piano dell' angolo MT*t* roti intorno alla T*t* finchè la TM si trovi paralella alla retta che unisce il punto P col punto di vista, la quale, nella sopra definita posizione, sarà la P R. Io dico che allora la retta MN coinciderà con l' obbiettiva della A*a*.

Imperciocchè, nella considerata posizione dei piani *t*TM, PR*p*, essendo paralelle le due P R, M T, quest' ultima sarà ancora paralella all' obbiettiva rappresentata in A*a*; e per-

ciò la parte MN, intercetta fra le due RM, RN si troverà paralella ed eguale alla detta obbiettiva.

In oltre una retta che passi pel punto di vista, e pel punto M, si troverà nel medesimo piano con la TP. La segherà dunque in modo che il segmento terminato in P al segmento terminato in T avrà la ragione della PR alla MT. Per conseguenza quella retta passerà per *a*, coincidendo col raggio visuale che passa per lo stesso punto *a*.

Similmente si prova che la retta condotta pel punto di vista e pel punto N, considerato nella posizione predetta, dovrà passare per A, e coincidere col raggio visuale che passa per lo stesso punto A. Adunque la MN, e l' obbiettiva della A*a* si troveranno eguali, paralelle, ed intercette fra i due medesimi raggi visuali che passano per *a*, ed A. Ma tutte queste condizioni non possono avverarsi senza che la MN coincida con l'obbiettiva della A*a*; dunque la posizione che prenderà la MN nella maniera indicata, sarà quella dell' obbiettiva supposta.

§. 53. È manifesto che il punto T è quello dove il quadro è incontrato dall' obbiettiva rappresentata in A*a*, quando suppongasi prolungata. La retta poi T*t* è l'intersecazione del quadro con un piano in cui giacciono le obbiettive delle A*a*, Aα.

Per tanto, se in quel piano esistano altre rette, delle quali sian date le prospettive, potremo determinare le loro lunghezze, e le rispettive posizioni.

Imperciocchè sia la *ha* prospettiva d'una di queste rette, e si prolunghi ad incontrare in *t* la T*t*. Il punto *t* sarà quello ove la detta obbiettiva, prodotta che sia quanto fa d' uopo, incontrerà il quadro. Adunque se per *t* condurremo la retta *t*HM, sarà in essa l' obbiettiva della *ah*.

Conduciamo la retta R*h*, e si prolunghi fino ad incontrare in H la *t*HM. Sarà MH la lunghezza dell' obbiettiva rappresentata in *ah*, §. 52.

Quando il triangolo *t*MT, rotando intorno alla *t*T, e

dalla parte posteriore del quadro, si troverà paralello al piano determinato dal punto di vista, e dalla P*p*, allora la MH coinciderà con la detta obbiettiva rappresentata in *ha*, come la M N coinciderà con l'obbiettiva rappresentata in A *a*.

L'angolo H M T è quello che le due obbiettive formano insieme.

Adunque è determinata di lunghezza e di posizione l'obbiettiva rappresentata in *ha*; e nel modo medesimo si può determinare qualunque altra retta giacente in quel piano.

Se fosse richiesta la sola proporzione che hanno fra loro le obbiettive rappresentate dalle A *a*, *ah*, e l'angolo da esse formato, è chiaro che basterebbe porre d'una lunghezza arbitraria la A *s*, §. 52, ed eseguita la costruzione che fu insegnata superiormente, si otterrebbero le due misure MN, M H proporzionali alle dette obbiettive, e l'angolo H M N eguale a quello da esse compreso.

§. 54. È facile vedere come si possa far uso delle nozioni precedenti per levar di lontano la figura d'una fabbrica inaccessibile; ma volendo mostrare più chiaramente l'importanza di quest'applicazione, spiegherò per disteso un esempio.

Fingo che un ingegnere, trovandosi privo d'istrumenti geodetici, debba conoscere la forma d'una fortificazione inaccessibile.

A questo fine sceglierà nel terreno quella parte che sia più piana, e meno inclinata all'orizzonte; che se tale non possa trovarla, vedremo poi come agevolmente si tolgano le difficoltà che nascono da questo difetto.

In così fatta parte del terreno segnerà una retta linea, che, per quanto è possibile, accostisi ad essere paralella alla fronte della fortificazione.

Questa linea sarà come la base, o la fondamentale d'un quadro aereo, che immaginerà elevato verticalmente sopra di essa, e sul quale fingerà di descrivere la prospettiva della fortificazione che vuol osservare.

Fig. 25 Rappresentiamo nella X Z la detta linea fondamentale, ed in S un punto di stazione assegnato ad arbitrio, secondo l' ingegnere giudicherà che sià più comodo per l' osservazione.

Pongasi in quel punto confitta nel terreno un' asta verticale, che stabilisca col suo estremo superiore il punto di vista. Ora si conduca dal punto S la retta S S' perpendicolare in S' alla X Z, e sarà così determinato il punto S'', ove la linea verticale, che si può immaginare descritta nel quadro aereo, incontrerà la fondamentale X Z. Sarà pure determinata con ciò la lunghezza S S' del raggio principale, ed in oltre la posizione del punto principale.

Preparate queste cose l' ingegnere ponga l' occhio nello stabilito punto di vista, e di là osservi i termini d'uno spigolo rettilineo che possa chiaramente discernere, come sarà la cresta d' un parapetto, o la linea d'un cordone.

Frattanto un assistente moverà lungo la retta XZ un' asta verticale, e sopra uno spigolo di essa farà scorrere un indice, o la punta d' un dito, finchè copra il punto attualmente osservato dall' ingegnere. L' indice si troverà allora nell' intersecazione del detto spigolo col raggio visuale relativo a quel punto, cioè a dire, segnerà nel quadro aereo la prospettiva del punto stesso.

Adunque la distanza dell' asta dal punto S'' sarà la declinazione apparente, e la misura verticale dell' asta medesima intercetta fra l' indice e la fondamentale sarà l' altezza apparente del punto osservato.

Ripetendo le osservazioni in questo modo per quanti altri punti sarà di mestieri, potrà l' ingegnere conoscere le altezze, e le declinazioni apparenti di essi; e se siano rette distinte nell' oggetto osservato, come quelle che abbiamo supposto, ne potrà descrivere le prospettive sopra d' un foglio con una scala qualunque, §. 40.

Fig. 26 Potrà quel foglio essere rappresentato nella Fig. 26, ed i punti X, Z, S, S' rappresenteranno quelli che dalle me-

de-

desime lettere furono indicati sul terreno nella Figura precedente . SS' sarà tante parti della scala adoperata per la descrizione prospettica sul foglio, quante parti della scala adoperata per le misure sul terreno si trovò essere la SS', Fig. 25 . Lo stesso dicasi di tutte le altre misure sul foglio, le quali sono proporzionali a quelle del quadro aereo .

Rappresenti dunque *o* il punto principale ed S'*o* la linea verticale . Col metodo superiormente esposto, supponghiamo descritte le prospettive *b'*, *c'*, *d'*, *b''*, *c''*, *d''* di altrettanti punti obbiettivi , che siano termini delle linee indicanti i cordoni, e le creste dei parapetti spettanti alle due faccie d'un bastione .

Perchè le rette obbiettive rappresentate dalle *b'c'*, *b'' c''*, sono paralelle, e paralelle pur sono quelle rappresentate dalle *b'd'*, *b''d''*, sarà P, dove concorrono le prime, il loro punto accidentale , e parimenti *p* sarà il punto accidentale, dove concorrono le seconde , §.37 .

Perciò , descritta la P*p* , e sopra di essa condotta perpendicolare la *o*O, se facciasi la OV eguale alla distanza del punto di vista dal quadro, cioè al raggio principale, e la O*i* facciasi eguale alla O*o*, la retta *i*V sarà eguale alla distanza del punto di vista dalla retta P*p*, e l'angolo O*i*V sarà misura dell'inclinazione che ha rispetto al quadro il piano obbiettivo , ove giacciono le due rette rappresentate dalle *b'*P, *b'p*, ovvero quello delle due rappresentate dalle *b''*P , *b''p* .

Se poi facciasi la O V' eguale alla *i*V, e si congiungano le PV', *p*V' , l'angolo P V'*p* sarà quello che formano le due obbiettive rappresentate nelle due *b'c'*, *b'd'*, ovvero le altre due rappresentate nelle *b'' c''*, *b'' d''*.

Che se i piani delle menzionate obbiettive siano orizzontali, si troverà che la retta P*p* passa pel punto *o* .

Per tanto continuando l'ingegnere ad osservar altre rette che siano tutte in un medesimo piano , verrà in cognizione e degli angoli che formano fra loro , e della proporzione che hanno le loro lunghezze , §. 53 : che è quanto

dire, conoscerà la figura dell' osservata fortificazione inaccessibile.

§. 55. Ma supponghiamo ancora che faccia d' uopo conoscere la grandezza vera della figura trovata. A questo effetto basterà conoscere la vera lunghezza d'uno, qual si voglia, fra i lati che formano il contorno. Consideriamo quel-
Fig. 25 lo che corrisponde alla trovata prospettiva $b'c'$ Fig. 26; e per maggiore chiarezza trasportiamo l' attenzione sopra la Fig. 25.

Se nelle $S'b$, $S'c$ rappresenteremo le declinazioni apparenti dei due punti osservati, i quali sono termini del lato obbiettivo, è chiaro che le due rette indefinite Sb, Sc rappresenteranno sul piano geometrico le projezioni dei due raggi visuali relativi ai detti punti.

Ora supponghiamo che sul terreno si prenda un altro punto di stazione, e sopra quello sia assegnato un nuovo punto di vista, dal quale si ripeta, nel modo già indicato, l'osservazione dei medesimi punti obbiettivi. La nuova stazione si rappresenti in K, e le misure $S'm$, $S'n$ rappresentino le due nuove declinazioni apparenti dei detti punti.

Fra le due rette Km, Kn dovrà essere intercetta, sul piano geometrico, la projezione della retta obbiettiva che è terminata ne' due supposti punti; la qual projezione deve pur essere intercetta fra le due rette Sb, Sc. Adunque non potrà essere se non che la MN, la quale unisce il punto M, ove si tagliano le due Sc, Km, col punto N, ove si tagliano le due Sb, Kn.

Oltre a ciò, le rispettive distanze dei punti M, N dalla XZ esprimeranno quelle dei due osservati punti obbiettivi dal quadro. Ma si conoscono ancora le altezze apparenti dei punti medesimi, e le distanze dei due supposti punti di vista dal quadro. Adunque, §. 34, potremo determinare le altezze vere dei punti osservati; e quindi sarà nota la lunghezza del lato obbiettivo da essi intercetto.

Ma perchè un, benchè piccolo, difetto nelle misure

S'*b*, S'*c*, S'*m*, S' *n* può recare notabile errore nella determinazione dei punti M, N, sarà utile ripetere l' osservazione da un terzo punto di vista, per determinare due altre rette che debbano passare pei medesimi punti M, N. Se ciò avvenga, sarà confirmata l' esattezza della precedente operazione. Altrimenti si avrà un indizio di errore, e ripetendo con maggior diligenza le osservazioni, potremo correggerlo.

§. 56. La risoluzione ora esposta, siccome qualunque altro dei metodi praticati per levare le figure, e determinare le distanze inaccessibili, va soggetta a quegli errori che dipendono dalla refrazione. Nei casi di pratica ai quali puot' essere utilmente applicata la detta risoluzione, non è necessario tener conto dell' accennato errore, giacchè supponghiamo che ricchieggasi una discreta approssimazione, e nulla più. Ciò nulla ostante chi volesse operare con sommo rigore, potrà coi metodi acconcj rettificare l'osservazione di ciascun punto osservato, o quella d'un punto intermedio fra i più ed i meno distanti; ed in tal modo l' operazione sarà condotta con quel grado di esattezza che suole esigersi negli ordinarj problemi di Geodesia.

Ma non ometterò di osservare che adoperando il metodo esposto, §. 54, esso rettifica in parte da se medesimo quell' errore che dipende dalla refrazione de' raggi. E perchè non rimanga alcun dubbio su questa proposizione, ci arresteremo alcun poco a dimostrarla minutamente.

Se da un dato luogo si osservi un punto lontano, e cogli opportuni istrumenti si misuri l' angolo d' inclinazione che il raggio visuale forma col piano orizzontale relativo al punto della stazione, è noto che l' angolo così misurato è maggiore, o minore di quello che forma col detto piano orizzontale una retta condotta dal punto osservato al punto dell' occhio, secondo che quel punto è superiore, o inferiore per rispetto al piano menzionato.

Rappresentisi questo piano dalla retta O T, ed O sia il Fig. 27.

punto dell' occhio, B il punto osservato, e superiore al piano O T.

La curva BO rappresenterà il raggio visuale; e giudicando il punto osservato nella tangente O B', quando veramente è nella corda O B, si misura l' angolo di elevazione B' O T in vece dell' angolo B O T; e perciò supponendo proporzionali alle N T, N O, le distanze del punto osservato, e dell' occhio dal quadro, si attribuirebbe a quel punto un' altezza TB', maggiore della vera T B, se fosse presa la N *n'* per misura dell' altezza apparente. Per lo contrario, se il punto osservato rappresentisi in *b* al di sotto del piano orizzontale O T, la curva *b* O rappresenterà il raggio visuale; ed il punto osservato giudicandosi nella tangente O *b'*, si misura l' angolo *b'* O T in luogo del vero *b* O T; onde risulta un' altezza T *b'* minore della vera T *b*.

Questa quantità di eccesso, o di difetto, dell' angolo erroneo in comparazione del vero, si computa in pratica prossimamente eguale alla diciottesima, o alla quattordicesima parte dell' arco terrestre intercetto fra 'l punto osservato ed il punto della stazione, considerando quest' arco espresso in minuti e secondi. Assai piccolo è dunque l' errore quando le distanze son piccole, come nel proposto caso; nel quale supponendo che non richieggasi più che una discreta approssimazione, non vuolsi tener conto di quell' errore. Ma per vedere ancora come si possa vie più sicuramente trascurare nella nostra costruzione, fingiamo che la retta N *n* rappresenti il quadro veduto in profilo, ed *n* rappresenti il vero punto d' incontro del raggio visuale col quadro. L' altezza apparente sarà dunque N *n*; e quindi il punto obbiettivo si considera nella retta che passa per O e per *n*. Laonde nel dedurre l' altezza vera dall' altezza apparente ottenghiamo una misura bensì maggiore della T B, ma più piccola della T B'.

Alle precedenti osservazioni dobbiamo aggiugnere che trattandosi di determinare la lunghezza della retta osser-

vata, della quale supponghiamo conosciuta la projezione sul piano geometrico, §. 55, adoperiamo la differenza fra le altezze dei termini, non già le altezze medesime, §. 11, P. I. Se dunque i detti termini si troveranno ambedue dalla medesima parte per rispetto all'orizzonte della stazione, quella differenza non potrà essere affetta di error valutabile, desumendola dalle altezze erronee, anzi che dalle vere; giacchè le distanze dei due termini dall'occhio non supponghiamo ch' esser possano tanto differenti da poter cagionare diseguaglianza sensibile negli eccessi, o nei difetti che le altezze erronee avranno in confronto delle rispettive altezze vere.

§. 57. All' ineguaglianza, ed alla pendenza del suolo, si potrà agevolmente rimediare, se nel luogo ove dovrà essere stabilita la fondamentale, sia collocato un regolo, o teso un filo orizzontalmente, e sollevisi dal terreno il regolo, o il filo, in guisa che col punto di stazione determini un piano orizzontale. Il filo, o lo spigolo del regolo rappresenterà allora la fondamentale, alla quale si riferiscono le altezze.

§. 58. Anche i Geografi giovansi della prospettiva; nè altro sono le così dette projezioni stereografiche, per le quali si rappresenta in un circolo un emisfero terrestre, fuorchè prospettive descritte nell' ipotesi che il quadro sia lo stesso circolo che è base dell' emisfero in esso rappresentato, ed il punto di vista sia un polo di quel medesimo circolo.

Si rappresenti sul circolo RPSQ un circolo massimo del globo terrestre, ed insieme la projezione retta del globo stesso. Nel semicircolo RQS sia rappresentato quell' emisfero, del quale vogliam fare la mappa, cioè la rappresentazione sul piano della sua base, che sarà il circolo rappresentato dal diametro RS. P sia un polo di questo circolo, cioè un estremo del diametro PQ perpendicolare al suo piano. Fig. 28

Egli è chiaro che la prospettiva di qualunque figura e

di qualunque punto assegnabile sulla superficie dell' emisfero R Q S, sarà contenuta nel circolo R S, quando il punto di vista pongasi nella retta C P, ancorchè prolungata indefinitamente. Adunque la prospettiva di tutta la superficie emisferica R Q S sarà il circolo R S, prendendo il polo P come punto di vista.

In oltre, la prospettiva di qualunque circolo, e di qualunque arco circolare descritto nella detta superficie emisferica sarà un circolo, o un arco circolare, descritto entro al circolo R S.

Imperciocchè supponghiamo che il piano della figura, il quale deve sempre passare per l' asse P Q della data base emisferica, passi ancora pel centro del dato circolo obbiettivo. Si troverà allora perpendicolare al suo piano; e perciò la projezione retta del circolo obbiettivo sul piano della detta figura, sarà sempre una retta eguale al diametro di esso circolo.

Ciò posto, rappresentiamo cotal diametro nella retta MN, e sian condotte le rette M P, N P, le quali seghino rispettivamente in *m*, ed *n* la R S.

Nel triangolo M P N sarà projettato il cono visuale, che ha per base il circolo obbiettivo rappresentato in M N, e per vertice il punto P. Nella retta *mn*, sarà similmente projettata la sezione che fa in quel cono il piano prospettico RS; la qual sezione è la prospettiva del circolo obbiettivo. Se dunque tal sezione sarà subcontraria, sarà pure un circolo la detta prospettiva.

Ora conduciamo la retta R P, ed osserviamo che l' angolo P*m*S eguaglia i due angoli P R S, R P M, presi insieme. Eguaglierà dunque un angolo che abbia il vertice nella circonferenza, ed insista sopra l' arco P R M.

Ma tale è l' angolo P N M; dunque esso eguaglia l' angolo P *m* S. Perciò la prospettiva del dato circolo, la quale è una figura projettata nella retta *m n*, sarà un circolo, ed *m n* sarà suo diametro.

Che se in vece di M N, sia M'N la projezione retta del circolo obbiettivo, avremo la P M' in luogo della P M, ed il triangolo M' P N rappresenterà la projezione del cono visuale, siccome la *m' n* rappresenterà la projezione della sezione che fa in esso cono il piano rappresentato in *m'* R S; cioè della prospettiva corrispondente al nuovo circolo obbiettivo.

Per tanto l'angolo P *m'* S eguaglia la differenza dell'angolo M'PR dall'angolo P R S, cioè la differenza di due angoli, i quali, avendo i loro vertici nella circonferenza, insistano rispettivamente sopra gli archi P R, R M'. Tal differenza eguaglia l'angolo insistente sull'arco P M', e posto col vertice nella circonferenza. Essa eguaglia dunque l'angolo P N M'; e quindi la menzionata sezione dev'essere un circolo; ed *m'n* sarà suo diametro.

§. 59. Ciò posto sia *r* K *s* L il circolo nel quale si vuol descrivere la mappa, e l'altro circolo, ad esso eguale, R P S Q rappresenti l'equatore. R S sia quel diametro nel quale è projettata la base dell'emisfero cui vogliamo rappresentare, e P sia il polo cui si riferisce la descrizione, ponendo in esso il punto di vista. È chiaro che i due poli dell'equatore saranno projettati nel centro C di esso, e che la projezione d'un meridiano sarà un diametro del circolo RPSQ. Perchè poi tutti i meridiani si tagliano scambievolmente nei poli dell'equatore, le prospettive dei meridiani si taglieranno nelle prospettive di essi poli, le quali ponghiamo che siano negli estremi K, L del diametro K *c* L. Fig. 29

Ponghiamo il diametro *r s* perpendicolare all'altro K L, ed intendasi ciascheduno di essi prolungato indefinitamente fuori del circolo.

Preparate queste cose, si dimandi la prospettiva, ovvero la projezione stereografica del meridiano projettato nel diametro M N.

Descriveremo le P M, P N, sicchè vada la prima a segare in *m*, e la seconda a segare in *n* la retta S R. Sarà *m n* diametro della prospettiva cercata. Perciò si divida per

mezzo in G; e sarà G centro di quella prospettiva. Presa dunque la cg eguale alla CG, sarà g il centro della detta prospettiva, considerata nel piano del circolo r K s L, in cui dev' essere descritta. Adunque col centro g e coll' intervallo G n, si descriva il circolo μ K ν L, che sarà la cercata prospettiva.

Ma perchè nell' emisfero proposto giace sol tanto la metà del meridiano projettata in CN, una sola parte del circolo ora descritto, cioè quella che rimane entro al circolo r K s L, sarà prospettiva di essa metà. Questa parte poi, che è l' arco K ν L, dovrà essere terminata nei punti K, L, per la ragione che abbiamo allegata di sopra.

Nel modo medesimo potremo dunque descrivere nella mappa le rappresentazioni di quanti altri meridiani ci piaccia.

Ora consideriamo quel meridiano che è projettato nel diametro PQ; e fingiamo che, rotando intorno a quel diametro, venga a porsi sul circolo equatoriale RPSQ, il quale, per conseguenza, rappresenterà ora il supposto meridiano. Sia V un de' due punti, ove questo è segato da un circolo paralello, e la corda VT, normale alla retta RS, sarà diametro, ed insieme projezione di quel paralello. Per ottener dunque la sua prospettiva descriveremo le due rette PV, PT, delle quali la prima seghi in u, e la seconda in t la retta RS prolungata. Sarà tu diametro della cercata prospettiva, ed il punto X, che divide per mezzo la tu, rappresenterà il centro. Perciò si prenderà la cx eguale alla CX, e col centro x, coll'intervallo Xu, si descriverà il circolo $zy\tau$, che sarà la prospettiva cercata.

Ma una sola metà di quel circolo appartiene all' emisfero proposto, e di essa sarà prospettiva l'arco $y\tau z$ contenuto nel circolo r K s L. Nel modo medesimo si potrà descrivere le prospettive di quanti altri paralelli sia d'uopo. Laonde potremo nella mappa rappresentare con archi di circolo tutti i meridiani che procedono di grado in grado, dividendo l' emisfero secondo la longitudine; come pure con archi

cir-

circolari rappresentar potremo tutti i paralelli che dividono di grado in grado l'emisfero medesimo secondo la latitudine, dall' una e dall' altra parte dell' equatore.

Che se sarà data la longitudine, e la latitudine di un luogo, dato sarà il meridiano ed il paralello corrispondente; onde per la costruzione testè eseguita si determina sopra la mappa il sito corrispondente al dato punto terrestre, che sarà nell' intersecazione dei due archi rappresentanti rispettivamente il meridiano, ed il paralello, come per esempio il punto *o*.

Le descrizioni di questa specie chiamansi *Equatoriali*, perchè il punto di vista si prende nella circonferenza dell' Equatore. Se in vece si prenda in uno dei poli dell' equatore medesimo, tutta la mappa sarà descritta in questo circolo: le prospettive de' meridiani saranno altrettanti suoi diametri: le prospettive de' circoli paralelli saranno circoli concentrici.

CAPITOLO V.

Sopra la collocazione più opportuna del punto di vista, e sopra certe condizioni della superficie prospettica.

§. 60. Qualunque sia l' ampiezza del cono ottico, nel quale si contengono gli oggetti che vogliamo rappresentare in prospettiva; e qualunque sia l' obliquità del quadro rispetto ad esso cono, l' effetto dei disegni, eseguiti colle regole che insegnate abbiamo superiormente, corrisponderà sempre all' intento; purchè siano veduti dal vero punto di vista, e con quelle cautele che usano gli ottici nelle dimostrazioni spettanti a questo argomento. Per un forellino, che a capello, è nel punto di vista, soglion essi far vedere certe prospettive disegnate secondo qualunque ampiezza del cono ottico, e ponendo a bello studio molto obliquo, rispetto ad esso cono, il piano del quadro.

Queste condizioni producono tali deformità nel disegno, che vedendolo da un altro punto diverso da quello ove è il foro accennato, appena confusamente rassembra a ciò che deve significare; ma quando si guardi per quel foro, prende tosto un altro aspetto, e rappresenta in buone proporzioni ciò che l' ottico si propone di far vedere.

Troppo ristretto sarebbe l' uso dell' arte, ed assai spesso fallito il suo scopo, se tante precauzioni fossero sempre necessarie per ottenere un effetto plausibile dalle rappresentazioni prospettiche.

Il fine ordinario dei disegni, e delle pitture, è di appagare il giudizio dello spettatore ancorchè questi non sia collocato esattamente nel vero punto di vista, come avviene d' ordinario, §. 50.

Fa d'uopo riflettere a questo proposito che noi non possiamo portar giudizio della perfezione, o dei difetti d' un disegno prospettico, se non in quanto conosciamo precedentemente le forme di quelle cose che nel disegno si rappresentano, ed in oltre gli accidenti ai quali le apparenze di quelle cose medesime vanno soggette, secondo le varie circostanze della posizione loro per rispetto a chi le guarda.

È dimostrato che le specie, o apparenze visibili degli oggetti altro non sono, rispetto al senso dell' occhio, se non che spettri, o figure colorate, estese in due sole dimensioni, disposte in una superficie sferica, di cui centro è l' occhio, e nella quale è il campo della visione.

Quella superficie sferica è il vero quadro naturale ove appariscono, come in uno specchio, le immagini, o naturali prospettive, degli oggetti presenti alla vista; e così fatte immagini sono appunto denotate col nome di *specie*, o *apparenze visibili*.

Affinchè una prospettiva artificiale, descritta in un piano, appaghi l'occhio di chi la guarda anche discosto alquanto dal punto di vista, al quale fu riferita la descrizione, è mestieri che le immagini così descritte differiscano quanto

meno si può da quelle specie visibili, secondo le quali noi giudichiamo che ci dovrebbero apparire gli oggetti espressi nel quadro, se fossero da noi veduti in quelle circostanze di posizione nelle quali si rappresentano.

Dissi che le immagini, o prospettive artificiali, debbono differire quanto meno si può dalle naturali, volendo accennare che una perfetta similitudine, a rigor matematico, non è generalmente possibile.

La qual proposizione si farà manifesta tosto che vorremo considerare la differenza che passa tra una superficie sferica ed un piano; ma per maggiore chiarezza piacemi recare un esempio semplicissimo.

Fingiamo che l'oggetto sia una sfera. Il cono ottico sarà della specie più semplice, cioè di base circolare, e retto. La prospettiva artificiale non potrà dunque avere la forma circolare se non che nel caso unico ove il piano del quadro sia normale all'asse del cono. In qualunque altro caso, la detta prospettiva avrà sempre figura ellittica; ma la prospettiva naturale sarà sempre un circolo, perchè tale è la figura dell'intersecazione che nasce fra la superficie sferica, costituente il campo della visione, e l'accennato cono ottico posto col vertice nel centro della superficie suddetta.

Questa è la ragione per cui, non ostante qualunque artificio di chiaroscuro, la prospettiva ellittica di una sfera non appagherà mai lo spettatore, se pur non la guardi sì obliquamente quanto conviene, perchè la figura ellittica apparisca circolare. Ma ritornando al nostro soggetto concluderemo che tanto differir deve la naturale prospettiva d'un dato oggetto dalla sua prospettiva artificiale, descritta in un piano, quanto la sezione che una superficie sferica produce in un dato cono, posto col vertice nel centro di essa, differisce dalla sezione che faccia un dato piano nel cono medesimo.

E poichè sarà tanto maggiore quella differenza, quanto più sarà obliqua la sezione del piano nel cono, ne segue

che una delle condizioni necessarie per conseguire la menoma dissimilitudine fra la prospettiva naturale, e l'artificiale, sarà questa, cioè che il piano del quadro sia quanto meno si possa obliquo al cono ottico.

Ciò posto, ogni qual volta è in nostro arbitrio la scelta di quel punto che dev' essere più cospicuo nel quadro, e perciò chiamasi *punto principale*, da esso dobbiamo condurre una retta normale al quadro, ed in quella collocare il punto di vista. Che se niuna ragione ci costringa a porre quel punto più vicino al destro che al sinistro lato del quadro, la più vantaggiosa collocazione, che che oppongano alcuni pratici ignari dei principj dell' arte loro, sarà certamente ad eguale distanza da ambedue i lati, come ci mostra la pratica frequentissima de' più valenti Maestri, e come, d' accordo con altri lodati autori, Eustachio Zanotti dichiara con queste parole . . . . *anzi io non dubito di asserire che la direzione più vantaggiosa dell' asse ottico sia sempre quella che incontra il mezzo del quadro*. (Tratt. di Prospett. Ragionamento sopra diverse questioni ec.)

§. 61. I raggi visuali contenuti nel cono ottico, e divergenti intorno intorno dal raggio principale, tanto più obliqui s' inclinano al piano del quadro, quanto più divergono dal detto raggio.

E se noi supponghiamo che il piano del quadro tocchi la sfera della visione in quel punto principale, che abbiamo di sopra indicato, avverrà che mentre le prospettive naturali dei punti obbiettivi si scostano da quel punto principale secondo le corde degli archi misuranti le distanze angolari dei medesimi punti dal raggio principale, le prospettive artificiali si scosteranno secondo le tangenti di quegli archi stessi; onde segue che vie minor dissimilitudine avrà la prospettiva naturale dalla corrispondente prospettiva artificiale, quanto minore sarà l' ampiezza del cono ottico, misurata per qualunque verso intorno al raggio principale.

Ma Natura ha posti certi confini, mostrandoci che qua-

lunque dimensione veduta sotto un angolo minore d'un minuto si sottrae per la sua piccolezza all' estimazione della vista, non apparendo che un punto. Adunque l' ultimo ristringimento, che accordare si possa all' ampiezza del cono ottico, sarà determinato da questa condizione, *che niuna di quelle dimensioni obbiettive, le quali vogliamo che appariscano distinte nella rappresentazione prospettica, ottenda un angolo visuale minore d'un minuto*.

§. 62. Resta che parliamo della massima ampiezza, della quale difficil cosa, anzi impossibile io credo, l' assegnare una misura precisa.

Non per altro fine che per accennare un errore antico, ricorderò quell' opinione, che la misura di cui parliamo debba stabilirsi in 60°, perchè tale sia prossimamente l' angolo formato da due raggi visuali, i quali passando pegli estremi d'un diametro della pupilla, vadano a concorrere nel fondo della retina.

Meno antico, ma non più conforme al vero, è il parere di alcuni, i quali pensano tale dover essere l'ampiezza massima del cono ottico, che sottenda quella parte del quadro cui veder puossi tutta in una volta con distinzione.

Il senso di questa proposizione è che, mentre l'asse ottico sta diretto ad un punto, possa distintamente vedersi intorno a quel punto uno spazio discreto.

Quest' opinione è smentita dall' esperienza stessa d'un suo autorevolissimo partigiano (1), nè può conciliarsi con le verità universalmente conosciute, sopra le quali si fonda la teoria della visione.

È dimostrato che la cognizione delle specie visibili da noi non si acquista in altro modo se non col trasferire suc-

---

(1) Eustachio Zanotti, luogo citato.

cessivamente da punto a punto e la direzione dello sguardo, ed insieme l' attenzione della mente.

Percorrendo in tal guisa i contorni delle dette specie, e delle parti loro, e comparando le posizioni reciproche dei punti osservati, l'idea compiuta della forma, che ha un oggetto presente alla vista, si genera nella fantasia, non mai in un istante, ma con successione discreta di tempo e di nozioni parziali.

La lunghezza di questo tempo dipender deve e dalla moltitudine delle parti, delle quali è d' uopo acquistare distinta nozione, per formare l' idea del tutto; e dal grado di evidenza con cui, secondo la nostra maniera di concepire, appariscono tra se legate esse parti, e dipendenti una dall' altra; e finalmente dalla cognizione anteriore che aver possiamo intorno alla figura dell' oggetto presente alla vista: cognizione per cui spessissime volte con pochi segni caratteristici risvegliasi nella mente in un attimo l' idea della cosa che ci si para innanzi agli occhi, senza che sia di bisogno esaminare tutte le particolarità della sua figura. Così riconosciamo a colpo d' occhio una persona familiare: così ravvisiamo in pochissime linee d' uno schizzo i contorni d' una figura umana, l' immagine d' un cavallo, d' una colonna ec. Questi giudizj dipendono più veramente dalle facoltà mentali, che dai soli attributi fisici del senso.

Può l' artista profittare accortamente con molto vantaggio di quelle facoltà, ma non dobbiamo inferire dai loro effetti che l' occhio veda con distinzione diversi oggetti compresi entro un angolo di qualche notabile grandezza, mantenendosi immoto e fiso ad un punto di mira.

§. 63. Più rettamente mi sembrano aver ragionato coloro i quali stabilirono che massima sia quell' ampiezza del cono visivo, oltre alla quale volendolo aumentare, nasce tosto nel disegno alcuna deformità spiacevole a vedersi.

Per intendere chiaramente in che consista, e come nasca tale deformità, immaginiamo che sia distinto in parti, o

in oggetti singoli quel componimento, qualunque sia, che noi vogliamo rappresentare in prospettiva. A ciascheduna di esse parti spetterà una piramide, o un cono visuale suo proprio, e contenuto dall'intero cono ottico, il quale comprende tutto il componimento. Di queste piramidi, o di questi coni parziali si dirà perpendicolare al quadro quello che formasi immediatamente intorno al raggio principale; gli altri saranno tanto più obliqui quanto più scostansi, o divergono da quel primo. Adunque le prospettive artificiali, determinate per le intersecazioni di questi coni col quadro, differiranno di mano in mano vie più dalle corrispondenti prospettive naturali, secondo che verranno a cader più lontane dal punto principale.

Le differenze possono arrivare fino a certi limiti senza che l'occhio sappia discernerle; ma finalmente giungono ad alterar di soverchio le simmetrie apparenti degli oggetti, e li presentano sotto aspetti evidentemente contrarj alle nozioni che abbiamo, ed ai giudizj che possiamo di essi formare. In ciò consiste quel difetto della prospettiva che suol essere indicato col nome di *deformità*.

Immaginiamo che nei circoli A, B, C, descritti sul piano geometrico, siano le projezioni di altrettante colonne eguali, e simili fra loro. Sopra la retta X Z, che rappresenterà la fondamentale, insista il quadro, ed S rappresenti il punto di stazione, cioè la projezione del punto di vista sul piano geometrico. Fig. 30

Conducendo dal punto S due tangenti al circolo A più vicino, e due al circolo C più lontano, saranno determinate le due sezioni *a b*, *c d*; la prima delle quali esprime il diametro apparente della colonna più vicina, e la seconda esprime quello della più lontana.

Attesa l'obliquità della sezione *c d*, può accadere ch'essa riesca non minore dell'altra *a b*; ciò nulla ostante se la prospettiva sarà guardata dal suo vero punto, e si eviti qualunque indizio che ci istruisca dell'essere *c d* eguale, o mag-

giore di *a b*, produrrà il suo effetto; mentre a noi parrà di veder corrispondere alla più lontana colonna il diametro apparente *c e* minore di *a b*.

Ma se quella medesima prospettiva sarà da noi osservata stando in un altro luogo, d' onde si vegga distintamente *c d* maggiore, ovvero uguale ad *a b*, mentre da tutti gli altri indizj siamo informati che la colonna, cui appartiene il diametro apparente *c d*, è più lontana dell' altra, cui spetta il diametro apparente *a b*; ed in oltre che le due colonne sono eguali e simili, nascerà un effetto del tutto opposto ai principj fondamentali d'ogni nostro giudizio sulle regole della visione; ciò che dir si potrebbe non impropriamente un assurdo.

Ma più evidente ancora ci apparirà l'assurdo considerando tutta la simmetria dell' una, e quella dell' altra immagine. Imperciocchè in quella che corrisponde alla prima colonna A, essendo digradate tanto l' altezza, quanto la larghezza, cioè il diametro, in ragione della distanza, si conservano prossimamente le proporzioni che sono nella prospettiva naturale; ma nell' immagine dell' altra colonna C, apparendo diminuita l' altezza in ragione della distanza, e non così il diametro, la prospettiva artificiale ci apparirà per questa causa con proporzioni troppo differenti da quelle che siamo accostumati a vedere nelle prospettive naturali di simili oggetti; delle quali abbiamo un esempio prossimo nella prospettiva della più vicina colonna A.

L'opposizione manifesta di ciò che apparisce in fatto, e di ciò che noi giudichiamo dover apparire, genera quel disgusto che, nell'usata maniera di esprimerci, si attribuisce al senso; ma in vero deriva da un giudizio rapido della mente.

Quasi del tutto esenti da questo difetto vanno le rappresentazioni del Panorama, che sono prospettive descritte in una superficie cilindrica concava, ponendo il punto di vista nell' asse della medesima, ed assai lontano dagli og-

get-

getti che si rappresentano. La curvità uniforme di così fatta superficie è, senza dubbio, la principal cagione dell'effetto sorprendente che producono le prospettive in essa descritte tutt' all' intorno, senza restrizione d'angolo ottico: effetto che, secondo la testimonianza di molti, arriva spesso alla perfetta illusione.

Ma per quanto risguarda le ordinarie prospettive descritte in piano, possiamo dall'esempio allegato argomentare per analogia quali siano gl'indizj sicuri d'un angolo visivo troppo grande.

E non solamente, supponendo che il quadro sia fra l'oggetto e l'occhio, riuscirà deforme il disegno quando, siccome dicono in termini dell' arte, lo scorcio è maggiore del perfetto: ciò che vuol dire, quando una dimensione apparente è maggiore della vera che ad essa corrisponde; ma sarà indizio di grave difetto ancora

1.° Quando alcune dimensioni prospettiche, non ostante che riescano minori delle obbiettive ad esse corrispondenti, pure non siano digradate secondo quella legge di prospettiva naturale che abbiamo imparata dalla quotidiana esperienza, come si vede che può accadere nelle due dimensioni prospettiche *ab*, *cd*, ancorchè ciascheduna di esse sia minore della corrispondente dimensione obbiettiva.

2.° Quando nell'immagine d' un medesimo oggetto si altera la simmetria delle sue dimensioni oltre agli esempj che siamo soliti osservare nelle apparenze naturali di oggetti simili, come pure abbiam notato che avviene nelle dimensioni apparenti della colonna C.

Qualunque degli enumerati indizj ci venga fatto di conoscere in sul principio dell'operazione, o cangeremo tosto la posizione del quadro, o allontaneremo il punto di vista, o escluderemo dalla rappresentazione alcuna parte del componimento. Così nell' esempio proposto, forse girando il quadro sì che la XZ formi angoli men differenti con le due tangenti estreme S*h*, S*m*, potrà emendarsi il difetto.

Se ciò non basti, converrà o allontanare il punto S, o escludere la rappresentazione della colonna C, s' essa è la prima a patire soverchia alterazione nella simmetria della sua prospettiva.

§. 64. Con intendimento di agevolare le pratiche, cercarono gli artisti alcune regole facili e generali per determinare in qualunque caso la più comoda ampiezza del cono ottico, ovvero l' opportuna distanza del punto di vista, ciò che torna allo stesso fine; e per maggiore semplicità si volle derivare la detta misura dalle sole dimensioni del quadro.

Siccome è verosimile che tali ricerche non siano state sempre intraprese partendo dai medesimi principj, non è meraviglia se le conclusioni differiscono di tanto intervallo quant' è fra diciotto, e sessanta gradi.

Ciò nulla ostante poichè sì fatte misure estreme furono dedotte da un buon numero di esperimenti, noi le risguarderemo come termini, entro ai quali l' intelligente prospettivista dee scegliere col proprio discernimento ciò che meglio convenga ad ogni caso particolare.

Alcuni volendo pigliar norma da quell' angolo sotto cui si vede comodamente un oggetto, e posta la loro attenzione principalmente sopra la figura umana, che è il soggetto più familiare e più importante della pittura, osservarono che per contemplare acconciamente le proporzioni d' un uomo, o d' una statua di naturale grandezza, siamo come da un istinto condotti ad una distanza non minore che tre volte l' altezza dell' oggetto (Leonardo da Vinci Trattato della Pittura n.° XXV); la qual distanza produce un angolo visuale assai prossimo a diciotto gradi.

Altri dovendo rappresentare nei loro quadri componimenti di grande estensione, cercarono quella maggiore ampiezza che non induca spiacevoli alterazioni nelle simmetrie delle immagini più lontane dal punto principale, §. 63. Ed avendo osservato che di leggeri s' incorre in quel difetto to-

sto che eccedasi la misura di gradi sessanta, riputarono che quì stabilire si debba l' ultimo confine .

Per tanto, dato il quadro, che sia rappresentato dal rettangolo *abcd*, ed assegnato in esso il punto principale *o*, come pure la retta orizzontale *r s*, e la verticale indefinita *eof*, trovano essi quel punto del perimetro che è più lontano dal punto *o*; e posto che sia *b*, col centro in *o*, e coll' intervallo *ob* descrivono un circolo *bef*. Fig. 31

Sul diametro *ef* costruiscono un triangolo equilatero *egf*; ed intendono che la perpendicolare, condotta sopra la base *ef* dal vertice *g*, determini la menoma lunghezza che assegnare si possa al raggio principale .

V' ha chi prescrive questa lunghezza non minore del diametro *ef*. V' ha chi vuol prolungarla fino ad eguagliare un diametro e mezzo, ed anche due diametri. V' ha finalmente chi vieta che sia minore di tre diametri : la qual lunghezza produce prossimamente l' angolo ottico di gradi diciotto . Tutte queste, e le altre misure intermedie possono essere acconcie, quale ad uno, quale ad altro caso, purchè non intervenga quell' essenziale difetto che abbiamo notato di sopra, §. 63; nè intorno a questo punto è miglior giudice altri che il gusto, instituito con principj esatti, e perfezionato dall' osservazione e dalla pratica .

Data l' area del quadro, quando l' oggetto è semplice, e rappresentasi in dimensioni assai grandi, per occupare esso solo, o tutta, o la massima parte dell' area data, come sarebbe un ritratto rappresentante tutta intera una persona, ovvero la prospettiva d'una colonna, descritta accuratamente per mostrare le sue proporzioni, e l' effetto che dee produrre nel luogo cui si destina, pare evidente che si dovrà preferire la minore ampiezza del cono ottico, cioè la lunghezza maggiore del raggio principale .

Una delle mezzane lunghezze potremo adottare per un soggetto mediocremente composto; e molto vuol essere considerato il grado di distinzione, e di lume che attribuir vo-

gliamo alle figure principali del quadro; perciocchè ove si vuol maggior distinzione, richiedesi minor ampiezza dell' angolo visivo che comprende l' estensione del quadro; e vuolsi por differenza fra oggetti di forma assai regolare ed invariabile, come le opere d' architettura, le macchine o tali altri cose, e fra oggetti di forma irregolare, come rupi, alberi, nuvole; ed anche non veramente irregolare, ma solo variabile, come animali che nei loro atteggiamenti mutano del continuo le apparenze delle proprie forme.

Imperciocchè *ove più facilmente può discoprirsi la differenza fra la naturale e l' artificial prospettiva, ivi con particolare attenzione guardar ci dobbiamo da quegli arbitrj i quali ingrandir possono cotal differenza.*

Laonde nelle rappresentazioni di paesaggi, e di cose molte, riunite sotto un medesimo punto di vista, assai lontane, e perciò men distinte, potremo allargare senza timore il detto angolo ottico fino alla massima sua grandezza, accorciando fino alla lunghezza menoma il raggio principale.

Nelle prospettive poi d' altro genere, ove si creda opportuno, o per qualche circostanza siamo obbligati ad ingrandir l'angolo ottico più che non vorrebbero strettamente le regole riferite alle dimensioni del quadro, sarà buon consiglio collocare ai lati di esso tronchi, ruine, ed altrettali cose che appartener possano senza sconvenevolezza al soggetto; ma non abbiano forme rigorosamente determinate e note.

Queste, per quanto io credo, son norme certe e generali; ma le opinioni da me esposte intorno a tale argomento, le quali non fossero conformi alle solite pratiche, io sottometter voglio rispettosamente al giudicio degli artisti filosofi, presso ai quali è l' autorità di pronunciare, e di correggere ciò che v' abbia d' errore.

§. 65. Nulla si cangerà nei metodi esposti, se il quadro esser debba collocato tanto alto, che il punto principale cada fuori di esso, come rappresentiamo nella Fig. 32, nella quale la retta X Z denotando il suolo, su cui sta lo

Fig. 32

spettatore, e la K O denotando l' altezza del punto di vista, F K sia l' altezza che ha la base del quadro *abcd*. Solamente è da notare che, in questo caso, la lunghezza del raggio principale vuol essere maggiore di quello che se il punto *o* cadesse entro l' area *abcd*.

Quando le condizioni del luogo, nel quale esser dee collocato il quadro, non ammettano tutta la necessaria lunghezza del raggio principale, reputo minore inconveniente descrivere la prospettiva secondo l'opportuna distanza, quantunque lo spettatore debba poi vedere il quadro più da vicino, che accorciar la distanza oltre ai limiti concessi dalle regole, per accomodarla alla capacità del luogo.

Imperciocchè nella prima condizione le prospettive artificiali rassomiglieranno alle naturali meglio che nella seconda. Perciò quella similitudine farà sì che lo spettatore non si accorga del difetto di sua posizione; mentre nell' altro caso è assai più facile accorgersi della deformità provenuta dall' aver posto il punto di vista troppo vicino.

Se il quadro dovesse inclinarsi alquanto, come si rappresenta nel profilo *ef*, è chiaro che il punto principale, rappresentato in *o*, andrebbe a cader più vicino alla base del quadro, sussistendo la medesima altezza K O dell' occhio, e la medesima lunghezza O*o* eguale alla *oo'* del raggio principale, e verrebbe nel tempo medesimo ad accorciarsi la distanza *o ω* dell' occhio dalla parete verticale; onde si vede che facendo inclinare il quadro, si può rimediare in parte al difetto che produce l' angustia del luogo.

Ma per quanto il punto principale *o* cada lontano dalla base, o da qualunque altro lato del quadro, cioè per quanto obliquo si ponga il cono ottico rispetto al piano di esso quadro, sempre si eseguirà la descrizione prospettica coi metodi già esposti; se non che, in tali casi, sarà tanto più difficile schivare, o nascondere i difetti della prospettiva artificiale in confronto della naturale, §. 61.

§. 66. Qualunque superficie curva può sostituirsi al piano per far l'ufficio del quadro. Noi abbiamo sott'occhio frequentissimi esempj di belle prospettive descritte sopra le volte degli edifizi. Ma in tali casi, chi volesse procedere per via di costruzioni geometriche, dovrebbe descrivere linee curve in vece di linee rette, per trovare le prospettive dei punti, e delle linee assegnate nell'oggetto.

La prospettiva d'un punto sarà nell'intersecazione della superficie prospettica, e del raggio visuale corrispondente a quel punto.

La prospettiva d'una linea sarà nell'intersecazione della medesima superficie prospettica con quella superficie conica, la quale avrà per base la linea data, e per vertice il punto di vista. Riducendo a questi principj qualunque problema, ritroveremo nel Cap. V, P. I.; tutto ciò che fa di bisogno per risolverlo. Ma l'operazione eseguita secondo tali norme, non potrà quasi mai conciliarsi con quella brevità, e semplicità, che pur vuolsi procacciar sempre nelle pratiche.

Furono adunque cercati espedienti meccanici per agevolare cotali operazioni; ed il più felice ritrovamento, per quanto parmi, è quello che ora son per esporre brevissimamente.

Fra 'l punto di vista, e quella superficie curva sopra la quale vogliamo delineare la prospettiva d'un oggetto proposto, fingasi collocata una lastra piana di cristallo trasparente, e su questa immaginiamo che sia disegnata la prospettiva del dato oggetto, riferita al medesimo punto di vista, rispetto al quale deesi descrivere la prospettiva sopra la superficie curva.

Se i contorni del disegno siano descritti con qualche colore assai denso, e scuro, ponendo nel punto di vista una candela accesa, dovrebbero apparire le ombre di quei contorni sopra la superficie curva; le quali ombre, se fossero sottili e precise, indicherebbero i contorni della prospettiva richiesta.

L' effetto che abbiamo ora immaginato può con sufficiente esattezza ottenersi nella maniera che segue.

La prospettiva dell' oggetto dato descrivasi sopra un quadro piano, che si fingerà interposto alla superficie curva, ed al punto di vista.

L' area del quadro, ove sarà così descritta la prospettiva, sia scompartita con una reticola di molti quadrati, e tanti, quanti si giudicherà essere di bisogno, segnando con un numero i termini di ciascheduna verticale, e similmente quelli di ciascheduna orizzontale.

Ciò fatto, abbiavi un telajo che racchiuda un' area di figura eguale e simile a quella del quadro piano; e con fila sottilissime si formi nel telajo una reticola eguale e simile a quella disegnata sul quadro, notando parimenti con numeri simili le fila corrispondenti alle dette verticali, ed alle orizzontali.

Posto il telajo, così preparato, in quel luogo dove abbiam finto ch' esser debba il quadro piano, e situata la fiaccola d' una candela nel punto di vista, le fila del telajo manderanno le loro ombre sopra la superficie curva, sulla quale apparirà disegnata una reticola corrispondente a quella che si contiene nel telajo; cioè la reticola apparente nella superficie curva sarà prospettiva di quella formata dalle fila.

Si potrà dunque segnare sopra la data superficie quella reticola apparente in essa, seguendo le linee che verranno indicate dalle ombre, indi con la scorta di esse linee trasferir si potrà sulla superficie curva il disegno formato sul quadro piano, giudicando prossimamente con l' occhio la situazione che deve aver ogni punto riferito ai lati di quel quadrilatero, o di quell' intervallo della reticola, nel quale esso punto è contenuto. Questa pratica si eseguirà nello stesso modo che fu indicato nel §. 45 relativamente ad un quadro piano; nè fa mestieri di spiegare più diffusamente come la reticola determinata in questo caso dalle ombre delle fila

corrisponda alla reticola prospettica che nel citato § abbiamo insegnato a descrivere sul quadro.

Se l' operazione esigerà una certa lunghezza di tempo, converrà por mente che frattanto, scemando la candela, non si scosti sensibilmente la fiaccola dal punto di vista; e perciò sarà più opportuna all' uopo una lucerna.

Perchè poi le ombre delle fila siano sottili, e precise, converrà che il telajo sia posto vicino quanto è possibile alla superficie curva su cui si vuol disegnare la prospettiva. Con quest' avvertenza dev' essere stabilita la posizione del quadro piano, in cui luogo andrà posto il telajo.

CAPITOLO VI.

Delle ombre, e degli sbattimenti.

§. 67. Un solido esposto incontro ai raggi del sole, o di qualunque altro lume, non può ricevere ad un tratto l' illuminazione in tutta la sua superficie; v' ha dunque una separazione che distingue la parte illuminata dall' oscura; e questa separazione è un contorno lineare determinato di posizione e di figura, relativamente alla forma ed alla data posizione del corpo illuminato, come pure alla direzione de' raggi che lo possono incontrare.

Sebbene l' accennato contorno possa variare nel medesimo oggetto, secondo le varie circostanze della sua posizione, e quelle del lume, ciò nulla ostante in ogni data figura obbiettiva conserva certi particolari caratteri i quali sono i principali indizj visibili della detta figura.

Imperciocchè primieramente osserviamo che se la superficie dell' oggetto sarà unica e continua, continua ed unica sarà pure la linea che costituisce quel contorno. Se discontinua sarà la superficie dell' oggetto, pur discontinuo sarà il contorno dell' ombra; ed in particolare, quando la superficie dell' oggetto sarà composta di faccie piane, il det-

to

to contorno sarà rettilineo, perchè composto di certi lati dello stesso solido obbiettivo.

In generale, per mostrare come si determini geometricamente il contorno dell'ombra, rinoveremo le considerazioni fatte sul principio del §. 138, P.I, immaginando che una medesima superficie generata da una retta linea involga, e tocchi esteriormente il corpo raggiante, ed il corpo illuminato. La linea del contatto fra questa superficie, e quella dell'oggetto, sarà il contorno dell'ombra. Se dunque sia unica, e continua la superficie obbiettiva, tale dovrà pur essere il contorno, §. 138. Ma se l'oggetto sarà terminato da faccie piane, i raggi costituiti nella superficie involvente, o passeranno per uno spigolo, essendo inclinati ad ambedue le faccie che in esso convengono: e perciò una di esse faccie, quella cioè su cui cadono i raggi compresi entro alla superficie involvente, sarà illuminata, e l'altra oscura; o passeranno rasente una delle faccie: ed uno, o alcuni lati di essa saranno termini della parte oscura; dunque il contorno dell'ombra, in ciascuno dei due casi, sarà poligono rettilineo, perchè formato da lati dell'oggetto che supponghiamo poliedrico.

Se molte, e discontinue bensì, ma curve siano le faccie dell'oggetto, alcun lato del contorno potrà essere in alcuno degli spigoli ne' quali convengono queste faccie; alcun altro lato potrà essere una parte della linea di contatto fra la superficie involvente, in cui sono i raggi estremi, e la superficie cui spetta una delle faccie. Adunque ancora in questo caso il contorno sarà discontinuo. Perciò la continuità, o la discontinuità nel contorno dell'ombra è indizio, generalmente, della continuità, o della discontinuità nella superficie dell'oggetto. A maggiore schiarimento di quanto abbiamo detto, gioverà produrre alcuni esempj.

§. 68. Gli effetti dell'illuminazione che noi conosciamo più famigliarmente sono quelli prodotti dalla luce del sole, o gli altri che ci procuriamo col lume artificiale d'una candela, o d'una lucerna. Nel primo caso i raggi si consi-

derano come fra loro paralelli, e nel secondo come tutti convergenti nel centro della fiaccola. Adunque nel primo caso la superficie involvente, della quale abbiamo parlato, §. 67 sarà cilindrica, o prismatica; nel secondo sarà piramidale, o conica. Sarà cilindrica l' una se l' oggetto illuminato sia compreso da una superficie continua; prismatica poi se l' oggetto sia terminato da faccie discontinue. Sarà conica l' altra nel caso che la detta superficie sia continua; piramidale sarà poi nel caso che sia discontinua la superficie medesima.

Fig. 33 §. 69. Data una sfera, per mezzo delle sue projezioni che sono i circoli ABD, *efg*, e date le projezioni MN — *mn* d' una retta paralella alla direzione della luce solare; trovare il contorno dell' ombra nella data superficie sferica.

La risoluzione di questo problema, e di qualunque altro analogo ad esso, fu già esposta, in astratto, nel §. 89 P. I. Io non parlerò dunque se non della costruzione simplificata che può convenire a questo caso particolare.

Sappiamo, §§. 130, 131, 132, P. I, che il contorno cercato dev' essere un circolo massimo.

Per conseguenza la sua projezione sarà un' ellisse. Si tratta dunque di determinare sopra ciaschedun piano coordinato la projezione ellittica del contorno.

Consideriamo due rette CQ, *cq*; una paralella alla MN; l' altra alla *mn*. Saranno CQ — *cq* projezioni dell' asse della superficie cilindrica involvente la sfera, e contenente i raggi estremi che la toccano.

Conducasi il diametro AB perpendicolare alla retta CQ. Sarà AB l' asse maggiore dell' ellisse, la quale, sul piano I°, dev' essere projezione del contorno richiesto.

Imperciocchè, fingendo condotte due tangenti AH, BG al circolo ABD, e paralelle alla MN, se per esse passeranno due piani perpendicolari al piano I°, saranno questi in contatto con la superficie cilindrica poco fa indicata, ed i due punti A, B saran projezioni di quelli, ne' quali i due piani

toccano la sfera. Adunque il diametro della sfera projettato in AB è pur diametro del contorno richiesto. Ma tutti gli altri diametri di esso avranno le loro projezioni di mano in mano minori, e queste saran diametri dell' ellisse che vogliamo descrivere; dunque AB sarà l' asse maggiore di essa.

L' asse minore sarà nella retta LCQ, e si determinerà brevemente come segue. Trovisi il punto P, dove l' asse della superficie cilindrica incontra il piano I°, e fatta la Kπ eguale alla CP, si descriva la retta $c\pi$. Conducasi una retta paralella alla $c\pi$ che tocchi il circolo efg in r, e misurata la distanza del punto r dalla verticale Kc, facciasi eguale a quella distanza tanto la CR, quanto la CR'. Sarà RR' l' asse minore cercato.

Imperciocchè la retta $c\pi$ rappresenta l' asse della superficie cilindrica, considerato nel piano che passa per la retta CQ, ed è normale al piano geometrico; e la retta tangente in r rappresenta uno di que' due raggi tangenti la sfera, i quali sono projettati nella retta CQ.

Il punto r rappresenta dunque un punto del contorno, ed il diametro rr' è pur diametro di esso. Adunque la RR' è projezione d' un diametro del contorno, cioè diametro dell' ellisse dimandata.

Perchè poi è perpendicolare all' asse maggiore AB, sarà l' asse minore. Adunque l' ellisse descritta intorno agli assi AB, RR' sarà, sul piano geometrico, projezione del contorno dell' ombra.

Similmente si troverà l' altra ellisse $uu'rr'$, che sul piano II° è projezione del predetto contorno.

§. 70. Se la luce debba provenire da un punto dato per le sue projezioni M—m, la superficie involvente sarà conica, e la linea di contatto sarà un circolo minore. Fig. 34

Conduciamo le due tangenti MA, MB; e la corda AB, che unisce i due punti di contatto, sarà paralella ad uno degli assi spettanti alla projezione di quel circolo sul piano I°. Pongasi in oltre la retta KI' eguale alla MC; e per I'

elevata la normale I'm' eguale alla Im, siano condotte le due tangenti $m'r$, $m'r'$ al circolo egf in r, ed r'. La MR sia fatta eguale alla distanza del punto r dalla retta m' I', e la M R' eguale alla distanza del punto r' dalla stessa m' I'.

Sarà la R R' uno degli assi di quell' ellisse che sul piano I° è projezione del circolo, la cui circonferenza è il contorno dell' ombra.

Dividasi per mezzo in V l'asse predetto RR', e sia condotta per V la retta S S' paralella alla A B. Sarà nella S S' l' asse conjugato di R R'. Si determinerà poi la lunghezza del semiasse SV, ponendo il rettangolo dei due segmenti R'u, uR al quadrato della Au, che è metà della AB, come il quadrato del semiasse R'V al quadrato del semiasse conjugato S V (1), cui si porrà eguale il corrispondente S'V; e l'ellisse descritta intorno agli assi SS', RR', sarà projezione del contorno accennato.

Nel modo stesso potremo determinare l'altra projezione sul piano II°.

Fig. 35 §. 71. Sostituiscasi una sferoide alla sfera proposta nel problema del §. 69.

Nelle due ellissi E F D, efh sia projettata la proposta sferoide; C—c sian projezioni del suo centro; CP—cp projezioni d' una retta condotta pel centro paralella alla direzione della luce.

Conducendo due rette paralelle alla CP, tangenti in A, e B l'ellisse EFD, si determinerà il diametro AB, il quale dev' essere projezione d'un diametro del contorno. E poichè questo contorno è un' ellisse, la sua projezione, su l' uno, e su l' altro piano coordinato, sarà un' ellisse. Adunque sul piano I° la projezione del contorno, avendo il diametro AB, avrà il suo conjugato nella retta C P, prolungata dall' una e dall' altra parte del centro C.

---

(1) Vedi Sezioni Coniche.

Per trovare la misura di questo diametro, immaginiamo nella sferoide una sezione piana projettata nella retta GCDP, e descriviamone la projezione sul piano II°.

A tale effetto siano condotte le rette E*e*, F*f* paralelle alla C*c*, e tangenti ambedue le date ellissi; cioè l'una nei punti E, F; l'altra ne' punti *e*, *f*; e si descriva la retta *ef*, che sarà un diametro.

Dal punto D si conduca paralella alla C*c* una retta che vada a tagliare in *d* la *ef*. Fatta la *cg* eguale alla *cd*, si descriva l'ellisse *ghdh'* intorno ai diametri conjugati *gd*, *hh'*, la quale sarà la projezione di quell'ellisse che sul piano I° è projettata nella retta GD.

Ora all'ellisse *dhgh'* si conduca una tangente paralella alla retta *cp*, ed il punto di contatto suppongasi *s*. Da questo punto si abbassi una paralella alla C*c*, che vada ad incontrare in S la CD. Posta la CS' eguale alla CS, si avrà in SS' il diametro conjugato di AB; e quindi l'ellisse descritta intorno ai diametri conjugati AB, SS', sarà sul piano I° la cercata projezione del contorno. In modo affatto simile si troverà poi l'altra projezione *sas'b* sul piano II°.

Se alcuno dubitasse che l'ellisse *dhgh'* non sia la projezione di quella che sul piano I° è projettata nella retta DG, ed è una sezione della data sferoide, osservi che una retta projettata nel punto D, tocca la detta sezione, ed insieme tocca nel medesimo punto un' altra sezione fatta paralellamente a quella che sul piano I° è projettata nella retta EF, e sul II° nell'ellisse *ehfh'*. La projezione di quella seconda sezione sul piano II° dev' essere simile alla stessa ellisse *ehfh'*, §. 130, P. I, ed avere il centro con essa comune. Adunque nel diametro *ef* dell'una dev' essere il corrispondente diametro dell'altra. Perciò l'estremo projettato in D deve avere la sua seconda projezione in *d*. Ma in quell'estremo accade il contatto della retta projettata in D coll'ellisse projettata nella retta DG. Dunque la retta D*d* toccar deve nel punto *d* la projezione dell'accennata ellisse sul

piano II°, §. 22, P.I. Ciò posto, saranno i punti *d*, *g* estremi d' un diametro della detta projezione; e quindi *h h'* sarà il diametro conjugato corrispondente, essendo *h h'* projezione di quel diametro della sferoide, che sul piano I° è projettato nel punto C.

Per la qual cosa il punto *s* sarà projezione di quello ove l' ellisse projettata in GD è toccata da un dei due raggi projettati nella medesima retta GD. Questo punto dunque è l' estremo d' un diametro spettante al contorno; e quindi S sarà la sua projezione corrispondente sul piano I°. Laonde SS' sarà projezione d' un diametro del contorno, ed AB projezione d' un altro diametro. Ma SS' è paralello alle tangenti negli estremi A, B; dunque è conjugato di AB, e perciò l' ellisse descritta intorno ai diametri conjugati AB, SS' è la cercata projezione del contorno sul piano I°. Similmente si trova l' altra projezione sul piano II°.

Fig. 36 §. 72. Se in vece di procedere paralelli, i raggi deriveranno tutti da un punto, le tangenti in A, e B dovranno convergere nella projezione di quel punto. Sia questo projettato in M—*m*, e si conducano le tangenti MA, MB. Saranno A, B projezioni di due punti che spettano al contorno. Ma un diametro di esso avrà la sua projezione nella retta condotta per M, e C; quindi apparterrà ad una sezione fatta nella sferoide da un piano projettato in quella retta.

Per tanto sia projettata nel diametro GD la detta sezione, e descriviamo sul piano II° la sua projezione *dhgh'* nel modo insegnato superiormente; indi per *m* sian ad essa condotte le due tangenti *ms*, *ms'*, le quali saranno projezioni dei due raggi tangenti, che sul piano I° sono projettati nella retta MD. I punti *s*, *s'* sono dunque projezioni degli estremi d' un diametro del contorno sul piano II°. Le projezioni loro corrispondenti sul piano I° si ottengono tosto, conducendo per *s*, ed *s'* due rette paralelle alla C*c*, le quali vadano ad incontrare rispettivamente in S, ed S' la retta MD.

Perciò SS' sarà projezione dell' accennato diametro; e quindi sarà diametro della projezione del contorno.

Ma AB è ordinata al diametro SS', §. 130 P. I; dunque il conjugato del diametro SS' sarà paralello all'ordinata AB, e passerà pel punto R, che divide per mezzo la lunghezza SS' (1).

Per la nota proprietà dell' ellisse, essendo poi il rettangolo delle due parti S'Q, QS al quadrato della metà S'R, come il quadrato dell' applicata AQ al quadrato del semidiametro conjugato RT, sarà questo determinato, e l' ellisse descritta intorno ai due diametri SS', TT' sarà projezione del contorno sul piano I°. Similmente troveremo l' altra projezione *asbs'* sul piano II°.

Egli è manifesto che questa maniera di soluzione può egualmente applicarsi alla sfera, §§. 69, 70.

§. 73. Sian date le projezioni M—*m* del vertice d'una superficie conica, e le projezioni ABC—*abc* d' una sezione fatta in essa, cui risguarderemo come sua direttrice, §. 41, P.I. Siano date in oltre le projezioni RS—*rs* d'una retta paralella alla direzione della luce; si dimanda il termine dell' ombra che apparirà sopra la superficie conica. Fig. 37

Conducasi per M la retta MP paralella alla RS, e per *m* la *mp* paralella alla *rs*. Trovisi l' intersecazione $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$ della superficie conica col piano I°, §. 42, P. I, ed il punto d'incontro P della retta projettata nelle MP—*mp* collo stesso piano I°, §. 11, P. I. Per quel punto P sian condotte le due tangenti PF, PG alla curva $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$, indi dai punti di contatto F, G conducansi a concorrere in M le due rette FM, GM, le quali saranno projezioni dei due termini dell' ombra.

Imperciocchè sia condotta dal punto G una perpendicolare sopra la XZ, e cada in *g*. Dal punto *g* conducasi poi

(1) Sezioni Coniche.

la retta *g m*, la quale sarà la seconda projezione di quella retta che sul piano I° si rappresenta in G M, ed è una generatrice della superficie conica. Adunque il piano determinato dalle due rette, una delle quali corrisponde alle projezioni *pm*—PM, l'altra alle projezioni *gm*—GM, è paralello alla direzione della luce, e tocca la superficie conica nella seconda delle due rette ora indicate, §§. 82, 84, P. I. Ma per quella retta passeranno infiniti raggi costituiti nel detto piano, e perciò tangenti la superficie conica; essa retta sarà dunque termine dell'ombra. Similmente concluderemo che l'altra retta determinata nel modo medesimo è termine anch'essa dell'ombra.

Fig. 38 §. 74. Se la superficie proposta sia cilindrica, e sia data, o si trovi per mezzo dei dati del problema la sua intersecazione *ABC* col piano I°, risolveremo il quesito con piccolissima diversità nella costruzione.

Imperciocchè siano MN—*mn* le projezioni d'una generatrice della superficie cilindrica. Conduciamo per *m* una retta *mp* paralella alla *r s*, e per M una MP paralella alla R S.

Trovinsi in oltre, §. 11, P. I, i punti *M*, P, il primo de' quali sia quello ove il piano I° è incontrato dalla generatrice anzi detta, ed il secondo sia quello ove il piano medesimo è incontrato dalla retta projettata in MP—*mp*.

Sarà nella retta *M* P l'intersecazione del piano I° col piano determinato da quelle due rette, il quale sarà paralello alla direzione della luce. Ciò posto, si conducano due rette paralelle alla *M* P, le quali tocchino rispettivamente in F, ed in G la curva *ABC*. Quelle due paralelle saranno intersecazioni del piano I° con due piani paralelli alla direzione de' raggi, e tangenti la superficie cilindrica nelle due generatrici, le quali passano pei punti F, G, §§. 82, 84. Adunque pel ragionamento medesimo, che abbiam fatto sopra la superficie conica, si concluderà che infiniti raggi toc-

che-

cheranno la superficie cilindrica in quelle generatrici; le quali perciò saranno termini dell'ombra.

Siano dunque condotte per F, e per G le due rette FV', GV paralelle alla MN, e le due Gg, F*f* perpendicolari alla XZ in *g*, ed in *f* rispettivamente. Per *g*, e per *f* sian condotte in oltre le due *gu*, *fu'* paralelle alla *mn*; e saranno GV — *gu* projezioni dell' una, FV' — *fu'* projezioni dell' altra generatrice.

§. 75. Propongasi da determinare il contorno dell'ombra che apparirà sopra la superficie d'un toro rappresentato per mezzo delle sue projezioni, come nella Fig. 6, §. 21.

Quei raggi che nel citato §. furon chiamati visuali, perchè si finse che portassero l' immagine della figura proposta, faranno l'ufficio de'raggi illuminanti nel problema presente.

Si determinerà dunque il contorno dell'ombra, come fu determinato il contorno apparente. E quanto alla pratica, potremo adottare in questo caso le medesime regole d' approssimazione, che furono insegnate in quello. Ma osserveremo solamente che nell'indicato §. 21 supponghiamo perpendicolari alla XZ le projezioni de' raggi visuali sul piano geometrico, e quì voglion supporsi inclinate in qualunque modo alla stessa XZ le projezioni de' raggi sul piano I°.

Esprimiamo questa circostanza nella Fig. 39, ove A M rappresenterà la projezione sul piano I° d'un raggio tangente la superficie del toro. Tutti gli altri dati suppongo che siano i medesimi, già enunciati nel §. 21. Fig. 39

Converrà descrivere le projezioni del contorno, secondo ciò che richiede la nuova condizione.

Pertanto il diametro DA dovrà essere la projezione dell' asse maggiore del contorno, sia che questo vogliasi descrivere a rigore geometrico, sia che sostituiscasi per approssimazione l'accennata ellisse, §. 21. Quest' asse trovasi nel piano, il quale sul piano II° è projettato nella retta *acd*, condotta pel punto *c* paralella alla fondamentale. Adunque, nel caso

nostro la projezione di quest' asse sul piano II° si determinerà conducendo per A, e per D due perpendicolari alla XZ, e producendole a segare in *a*, e *d* la retta *acd*. La cercata projezione sarà *ad*. Per questi due punti passerà dunque la projezione del contorno sul piano II°, ed in essi dovrà cadere quel flesso, che nella Fig. 6 fu indicato nel punto *c*.

I punti *h*, *i* rappresentano gli estremi dell' altr'asse, determinati come nel citato §. 21.

Ma le projezioni loro sul piano I° dovran essere nella retta HCI, condotta pel centro C, e perpendicolare al diametro AD.

Presa dunque la distanza del punto *h*, o del punto *i* dalla *mn*, si porterà la misura di tale distanza sopra la retta HCI, dall' una e dall' altra parte del centro C; e sarà determinata in H I la projezione dell' asse predetto, la cui lunghezza vera è *h i*.

Il punto projettato in H sul piano I°, si deve trovare in un piano paralello al piano I°, che passi per *h*. Adunque la projezione di questo punto sul piano II°, si troverà in una retta *h h'* paralella alla XZ, e condotta per *h*. Sarà dunque determinata questa projezione conducendo una retta pel punto H, che sia normale alla X Z, e seghi in *h'* la *h h'*.

Similmente troveremo la projezione *i'* dell' altro estremo; e la projezione del contorno dovrà passare pei quattro punti *h'*, *d*, *i'*, *a*, estremi de' due assi, i quali si tagliano scambievolmente nel punto *c*.

Chi vorrà determinare altri punti per via di costruzione rigorosa, descriverà prima la projezione del contorno sul piano orizzontale, deducendola da ciò che abbiamo dimostrato nel §. 88, P. I.

Supponghiamo che questa projezione sia il perimetro HAID; e vogliasi determinare sul piano II° la projezione del punto che sul piano I° è projettato in G.

Si prenderà la misura CG; e fatta ad essa eguale la *nk*, s' innalzerà la retta *kg'* paralella alla *mn*, che seghi il semi-

circolo *i g' e*. L' intersecazione accaderà in due punti, uno superiore, e l' altro inferiore alla retta *a c d*. È chiaro nel caso proposto, che il punto projettato in G sul piano I° dev' essere in un piano paralello allo stesso piano I°, e condotto pel punto superiore *g'*. Adunque la projezione richiesta sul piano II° sarà in una retta *g'g*, condotta per *g'* paralella alla *a d*. Perciò, elevata dal punto G una paralella alla *m n*, che vada a segare in *g* la *g' g*, sarà *g* la projezione dimandata, per cui deve passare una curva *a h' d i' a*, che è projezione del contorno dell' ombra.

§. 76. Esaminiamo ciò che accaderà in una superficie discontinua, quale è quella d' una volta a spicchi, detta comunemente *a padiglione*.

Essa è formata di triangoli eguali e simili, ciascun de' quali appartiene ad una superficie cilindrica, ed è terminato da due quadranti ellittici, eguali fra loro, e da una retta, che è la base.

Supponendo che questi triangoli siano sei, si rappresenterà sul piano I° la projezione della superficie da essi composta, descrivendo l' esagono ABCDEF, e conducendo da ciaschedun angolo una retta al centro G. Fig. 40

Tutte queste rette saranno projezioni dei lati ellittici dei triangoli menzionati, ed i lati dell' esagono rappresenteranno le basi.

Due triangoli opposti al vertice si troveranno in una medesima superficie cilindrica, cioè i due projettati in AGB, EGD saranno in una superficie cilindrica, la cui sezione fatta da un piano perpendicolare ad ambedue i lati AB, ED è un circolo, che ha il raggio eguale alla perpendicolare condotta dal centro G sopra uno dei due lati predetti.

Similmente i due triangoli projettati in BGC, FGE saranno costituiti in una superficie cilindrica, la cui sezione piana perpendicolare ad ambi i lati BC, EF è un circolo eguale al precedente; e così dicasi pure dei due triangoli projettati in AGF, CGD.

La corrispondente projezione sul piano II°, si otterrà descrivendo le projezioni *ag*, *bg*, *cg*, *dg*, *eg*, *fg* dei quadranti ellittici projettati rispettivamente nelle rette AG, BG, CG, DG, EG, FG sul piano I°. Sarà *g* projezione del vertice comune, e l' altezza *hg* eguaglierà il raggio del circolo inscritto nell' esagono ABCDEF.

Ciò posto, siano MN—*mn* projezioni d'una retta paralella alla direzione della luce; e si cerchi il contorno dell' ombra, supponendo i raggi paralelli fra loro.

Inscrivasi un circolo nell' esagono ABCDEF, e si conduca la retta GQ perpendicolare ai lati AB, ED.

Si trovi in oltre il punto O, dove la retta projettata in MN—*mn* incontra il piano I°, §. 11. P. I, e per un punto M della MN si conduca la retta M*pm* perpendicolare alla XZ, e prodotta ad incontrare in *m* la *mn*.

Fatte queste cose, conduciamo dai punti M, ed O, due perpendicolari MQ, OR, sopra la RQ; e la prima di esse producasi in S tanto che sia la QS eguale alla *pm*; indi si conduca una retta paralella a quella che passa pei due punti R, S, e tangente nel punto T il circolo inscritto. Se per T sia condotta una retta paralella alla ED, la sua parte VY, intercetta dalle rette GE, GD, sarà projezione di quel lato del contorno richiesto, il quale trovasi nel triangolo cilindrico projettato in EGD.

Imperciocchè fingiamo che il piano del triangolo RSQ, rotando intorno alla RQ, come suo asse, s'innalzi normale al piano I°. La retta SR sarà allora, sul detto piano normale, la projezione di quella che è projettata nelle MN —*mn*, sui piani I° e II°; siccome il punto S sarà projezione di quello che, sopra essi piani, è projettato in M — *m*. Adunque un piano che passi per questo punto, e per la retta RS, sarà paralello alla direzione della luce. Ora immaginiamo che nel piano del triangolo RSQ rimanga descritto il circolo tangente i lati dell' esagono.

Nell' indicata posizione normale di quel piano, il detto

circolo si troverà nella superficie cilindrica, ove giacciono i due triangoli projettati ne' due ABG, EGD. Se dunque per la tangente in T, che abbiamo condotta paralella alla RS, facciasi passare un piano normale a quello del triangolo RSQ, tal piano sarà paralello a quello precedentemente indicato, e toccherà la predetta superficie cilindrica. Esso piano sarà dunque paralello alla direzione della luce; e quindi conterrà infiniti raggi tangenti quella superficie cilindrica, i quali la toccheranno nella generatrice che passa per T. Ma la projezione di essa sul piano I° esser deve nella TVY; dunque la parte VY è projezione di quel lato del contorno, che si trova nella faccia projettata in EGD, §. 74. Conduciamo ancora la GQ' perpendicolare ai lati AF, CD, e pei punti M, ed O, le due perpendicolari MQ', OR', delle quali la prima si prolunghi in S' tanto che sia la Q'S' eguale alla *pm*. Si conduca poi una retta paralella a quella che passa pei punti S', R', e tangente in T' il circolo inscritto nell' esagono. Si proverà col precedente discorso che per T' conducendo una retta paralella alla CD, la parte di essa V'Y', che rimarrà intercetta dalle GC, GD, sarà projezione d'un altro lato del contorno, che giace nella faccia projettata in CGD. Non altrimenti si procederà a trovare l'altro lato projettato in V''Y'', e giacente nella faccia projettata in GBC.

Da ciò si vede che il contorno dell'ombra, incominciando dal punto rappresentato in E, avrà per suo primo lato un arco del quadrante ellittico projettato in EG, e la projezione di quest' arco sarà EY; il secondo lato seguente sarà una retta eguale, e paralella alla sua projezione YV; il terzo lato sarà un arco ellittico projettato in VY'; poscia verrà il quarto che sarà una retta paralella, ed eguale alla sua projezione Y'V'; a questo succederà il quinto, e sarà un arco ellittico projettato in V'Y''; si passerà quindi al sesto che sarà rettilineo, eguale, e paralello alla sua projezione Y'' V''; finalmente il settimo sarà un arco ellittico projettato in V'' B.

Si trasporteranno facilmente le projezioni sul piano II°, descrivendo la retta yu paralella alla XZ, e distante da essa quanto è distante il punto T dalla QR. Similmente si porrà la $y'u'$ paralella alla XZ, e da essa distante quanto il punto T' è distante dalla Q'R'; e così pure facciasi pel rimanente.

Laonde sul piano II°, la projezione del contorno richiesto sarà $eyuy'u'y''u''b$.

Con quest' esempio sarà pienamente spiegato ciò che abbiam detto nel §. 67, parlando dei contorni dell' ombra nelle superficie discontinue.

Non giudico necessario il ritornare sul medesimo argomento supponendo la luce emanata da un punto. Egli è chiaro che se, nella prima supposizione, la superficie contenente i raggi tangenti è composta di parti, altre curve altre piane, che successivamente si alternano, nella seconda ipotesi sarà pure composta di parti curve e piane, le quali successivamente si alternano col medesimo ordine.

Questa sola è la differenza, che nel primo caso le parti dell' accennata superficie, nelle quali si trovano i raggi che passano pegli archi ellittici projettati in EY—ey, VY'—uy', V'Y''—$u'y''$, V''B—$u''b$ sono tutte cilindriche, essendo tutti paralelli fra loro i raggi in esse costituiti; nel secondo caso tutte sono coniche, perchè i raggi in esse costituiti convergono nel dato punto. Le parti piane di quella medesima superficie contenente i raggi che passano pei lati rettilinei del contorno, come quelli projettati in YV—yu, Y'V'—$y'u'$, Y''V''—$y''u''$, saranno comprese nel primo caso da raggi paralelli; nel secondo poi saranno comprese da raggi convergenti nel dato punto. Laonde se nell' un caso la superficie involvente è prismatica, nell' altro è piramidale.

§. 77. Abbiamo già veduto, §. 67, che il contorno dell' ombra in un solido terminato da faccie piane dev' essere composto da certi lati del solido stesso.

Per vedere il modo di trovare agevolmente il detto con-

torno, prendiamo ad esempio l' icosaedro rappresentato dalle projezioni espresse nella Fig. 41; e siano MN — *mn* projezioni d' una retta paralella alla direzione della luce, volendo supporre i raggi tutti paralelli fra loro. Si trovi la misura 3 PIII dell' angolo d' inclinazione che la data retta forma col piano I°, e con questo dato, descriveremo sul detto piano le prospettive paralelle dei vertici degli angoli, prendendo come raggi visuali quelli dai quali ora intendiamo prodotta l' illuminazione. Fig. 41

L' operazione riuscirà semplicissima, e breve nel caso presente. Imperciocchè supponghiamo condotte dai punti *e'*, *e*, *f* le rette *e'* 1, *e*2, *f*3 paralelle alla X Z, le quali incontrino in 1, 2, 3 la 3P; e calate le perpendicolari 1 I, 2 II, 3 III alla stessa XZ, la prima perpendicolare 1 I sarà misura dell' altezza comune a tutti i punti projettati in $\mathcal{A}$ — *a'*, $\mathcal{B}$ — *b'*, $\mathcal{C}$ — *c'*, $\mathcal{D}$ — *d'*, $\mathcal{E}$ — *e'*; la seconda perpendicolare 2 II sarà misura dell' altezza comune ai punti projettati in A — *a*, B — *b*, C — *c*, D — *d*, E — *e*; finalmente la terza 3 III sarà misura dell' altezza del vertice projettato in F — *f*.

Ora conducansi da tutte le projezioni A, $\mathcal{A}$, B, $\mathcal{B}$, C, $\mathcal{C}$, ec. altrettante rette paralelle alla MN, sopra le quali dovranno essere le prospettive corrispondenti ordinatamente ai punti projettati in A, $\mathcal{A}$, B, $\mathcal{B}$ ec.; nè resterà da trovare se non che la distanza di ciascuna prospettiva dalla projezione corrispondente al medesimo punto obbiettivo.

Ora egli è facile vedere che la detta distanza deve eguagliare un cateto d' un triangolo rettangolo, di cui l'altro cateto sia l' altezza del punto obbiettivo. Così la distanza $\mathcal{A}\,\alpha'$ della projezione $\mathcal{A}$ dalla corrispondente prospettiva α', sarà eguale alla misura PI; la distanza Bβ fra la projezione B, e la corrispondente prospettiva β, sarà eguale alla misura P II; la distanza Fφ fra la projezione F, e la corrispondente prospettiva φ, sarà eguale alla misura P III; e così diremo delle rimanenti.

Descritte per tanto le prospettive α, β, γ, δ, ε, α', β', γ', δ', ε',

il contorno che passerà per le α', β, γ, δ, δ', ε', racchiuderà tutte le altre; e perciò sarà prospettiva del contorno dell' ombra. Esso dev' essere dunque composto de' sei lati che ora indicherò secondo il loro ordine.

1° projettato in $\mathcal{A}$ B — $a'b$, 2° projettato in BC — bc,
3° projettato in C D — cd, 4° projettato in D$\mathcal{D}$ — dd'
5° projettato in $\mathcal{D}\,\mathcal{E}$ — $d'e'$, 6° projettato in $\mathcal{E}\mathcal{A}$ — $e'a'$.

Trattandosi di solidi regolari, come quello proposto nel presente esempio, sappiamo che i lati del contorno debbonsi corrispondere paralelli, ed eguali a due a due; ciò che può rendere più agevole la distinzione del contorno stesso, tosto che siano stati trovati alcuni lati. Ed in fatti, quando siano descritti i tre lati $\delta'\varepsilon'$, $\varepsilon'\alpha'$, $\alpha'\beta$, i tre rimanenti possono essere determinati immediatamente per la detta condizione; ma ancora senza descriverli si vede a colpo d' occhio che se il lato projettato in $\mathcal{E}\,\mathcal{D}$ — $e'\,d'$ appartiene al contorno, ad esso pure spetterà quello projettato in BC—bc: se appartiene al contorno il lato projettato in $\mathcal{A}\mathcal{E}$ — $a'e'$, dovrà spettare ad esso anche l' altro projettato in DC — dc; ec.

Ma troppo sarei lungo se additar volessi le più minute avvertenze, le quali debbono essere insegnate piuttosto dall'uso.

§. 78. L' ipotesi ammessa nel §. 68 soddisfa bastevolmente all' oggetto d' imitare gli accidenti naturali, e più ordinarj delle ombre; ma per formarsi un' idea rigorosamente esatta delle circostanze geometriche colle quali sono prodotte, convien tener conto della figura che ha il corpo raggiante, e della sua distanza dal corpo illuminato.

Un esempio semplice basterà per mostrare come si scostino dal vero della natura le supposizioni dell' arte.

Fingasi di figura sferica il corpo raggiante, e parimenti sferica sia la figura dell' oggetto illuminato. La superficie involvente, e tangente questi due solidi, nella quale sono costituiti tutti i raggi estremi che toccano la superficie illuminata, sarà conica; e quindi il contorno dell' ombra sarà una circonferenza circolare, §. 131, P. I.

Se

Se poi l'oggetto si finga di forma sferoidica, potrà l'asse di rotazione esser posto talmente, che il suo prolungamento passi pel centro della sfera raggiante. In questo solo caso riuscirà circolare il contorno dell' ombra.

Ma se in vece passi pel centro della sfera raggiante il prolungamento dell'altr' asse della sferoide, allora il contorno non potrà essere nè un circolo, nè un' ellisse, come nella supposizione che i raggi siano, o paralelli fra loro, o convergenti in un punto.

Imperciocchè egli è facile vedere che il detto contorno non può giacere in un piano, ma è una linea di doppia curvatura.

Si rappresenti dal circolo TRV la sfera luminosa; dall' ellisse BMFN la sferoide illuminata; e dal circolo BFD la sezione fatta nella sferoide medesima con un piano che passi pel centro della sfera luminosa, e per quello della detta sferoide, formando angoli retti col suo asse di rotazione MN. Conducasi la retta indefinita SC, che passi pei centri S, C; la TD tangente ambedue i circoli, e la T'E tangente il circolo TRV, e l' ellisse BMFN. Pel punto di contatto E sia condotta una paralella all'asse MN, che vada ad incontrare in *e* l' ellisse dall' altra parte, per rispetto alla SC; e pel punto D si conduca una perpendicolare in *d* alla stessa SC. Saranno E, *e* due punti del contorno, e *d* sarà projezione di due altri punti spettanti ad esso. La posizione di questi due punti s'intenderà chiaramente, facendo rotare il circolo ABD intorno al diametro BF, finchè il punto D si trovi projettato nel punto *d*. Allora D sarà nella posizione d'uno dei menzionati punti, e l'altro sarà nell' estremo opposto *a* della D*da*, ov' essa incontra la circonferenza dall' altra parte. Fig. 42

Ora è chiaro (1) che i punti E, *e* non possono essere in

(1) Cagnoli Sezioni Coniche §. 248.

una medesima retta col punto *d*; dunque in una retta non sarà projettato il contorno; e quindi non può giacere in un piano.

Si verrà pure a questa conclusione considerando un' altra posizione della sferoide, diversa dalle due indicate.

§. 79. Oltre agli accidenti delle ombre che abbiamo fino ad ora considerati, e ch' io volontieri appellerei *ombre proprie*, perchè dipendono dalla propria figura dell' oggetto esposto all' illuminazione, un' altra specie ve n'ha che si chiamano *sbattimenti*, e dipendono da cause estrinseche al corpo, che da essi viene modificato; ond' io le chiamerei *ombre projette*; perciocchè son ombre come lanciate da altri corpi, che interrompono il corso de' raggi.

Quella superficie involvente l' oggetto illuminato, §. 67, se si considera come intercetta fra l'origine della luce, e la superficie dell' oggetto medesimo, contiene tutti i raggi dai quali è prodotta l' illuminazione sopra di esso. Il prolungamento della detta superficie al di là del contorno che limita l' ombra propria, contiene uno spazio ombroso; e qualunque corpo che si trovi, o tutto, o in parte, immerso in quello spazio, verrà coperto, o tutto, o in parte, dall' ombra che manda sopra di esso il corpo illuminato.

Se dunque si tratti di determinare una certa parte della superficie d' un oggetto, che resti immersa nello spazio ombroso, cioè nell' ombra projetta da un altro oggetto, il problema si riduce a trovare l'intersecazione della superficie terminante lo spazio ombroso, colla data superficie obbiettiva.

Questa dunque è la differenza geometrica della prima specie d' ombre, cioè delle *ombre proprie*, dalla seconda specie, cioè dalle *ombre projette*, che i contorni delle prime sono linee di contatto fra la superficie d' un oggetto, e la superficie involvente che contiene tutti i raggi tangenti l' oggetto stesso; i contorni poi delle seconde sono linee d' intersecazione fra la detta superficie involvente il primo

oggetto, e quella d'un altro oggetto qual si voglia che interseca i medesimi raggi.

Una sfera, una sferoide, ed in generale un solido generato per la rotazione d'una linea di second' ordine, esposto che sia all'illuminazione di raggi, o paralelli, o divergenti da un punto, manderà sopra un piano l'ombra projetta che dovrà avere la figura d'una sezione conica. Imperciocchè la superficie involvente, ch'è cilindrica se i raggi sian paralelli, e conica se partano da un punto, avrà sempre per direttrice una linea di second' ordine, cioè il contorno dell'ombra propria, §§. 131, 132, P. I. L'ombra d'un solido contenuto da faccie piane, se cada sopra d'un piano, sarà terminata da un contorno rettilineo.

L'ombra d'un solido contenuto da faccie discontinue sarà pure una figura terminata da linee discontinue; e così il contorno dell'ombra projetta corrisponderà sempre a quello dell'ombra propria. Imperciocchè in generale quando i raggi siano, o paralelli, o divergenti da un punto, il contorno dell'ombra projetta sarà la prospettiva del contorno dell'ombra propria; cioè, prospettiva paralella se i raggi sian paralelli; prospettiva concorrente se i raggi partano da un solo punto.

Ciò posto, per determinare la figura dell'ombra che manda un dato oggetto sopra d'un piano, potranno valere quei metodi già insegnati per determinare la prospettiva dell'oggetto medesimo sul quadro che fingasi piano.

Se poi l'ombra projetta debba cadere in una superficie curva, serviranno a determinare il suo contorno, quei metodi che nella P. I, Cap. V, furono insegnati per determinare le intersecazioni scambievoli delle superficie.

Ma per più comoda istruzione degli studiosi, percorreremo alcuni temi, onde vedere applicate le generali nozioni, ora esposte sui principj di questa pratica.

§. 80. Si domandi l'ombra projetta dell'icosaedro rap-

Fig. 41 presentato nella Fig. 41, supponendo i raggi paralelli alla retta data per le projezioni MN—*mn*.

Volendo descrivere l' ombra sul piano I°, si eseguirà quanto fu insegnato, §. 77, per descrivere il contorno $\alpha'\beta\gamma\delta\delta'\varepsilon'\alpha'$, che sarà quello dell' ombra.

Se poi vogliasi descrivere l' ombra sul piano II°, converrà trovare l' inclinazione della data retta col detto piano II°, e valersi dell' angolo trovato come ci siam serviti dell' angolo 3 PIII per la descrizione sul piano I°.

Potrebbe l' ombra cadere, parte sul piano I°, e parte sul piano II°.

La separazione accaderà nella XZ; perciò seguiteremo a descrivere il contorno sul piano I°, finchè si arrivi con un lato ad intersecare la X Z. Allora incomincieremo a descrivere la parte rimanente del contorno sul piano II°, finchè si arrivi ad intersecare con un altro lato la stessa X Z; indi ritornando alla descrizione sul piano I°, si compirà la figura. Questa pratica apparirà più chiara dopo la costruzione che additerò ne' seguenti esempj.

§. 81. Sia dato un piano per mezzo delle sue intersecazioni KL, K*l* coi piani coordinati; e vogliasi rappresentare in projezione, sul piano II°, la parte dell' ombra che cade sul nuovo piano dato.

È chiaro che in esso piano cadrà quella parte che è fra la retta KL, e la $\beta\gamma$. Per tanto descriveremo sul piano I° il contorno dell' ombra finchè si arrivi, per cagion d' esempio, all' intersecazione R del lato $\alpha'\beta$ colla retta K L. Per quel punto R si conduca una perpendicolare alla X Z in *r*; e prodotta la Bβ fino a segare in Q la stessa X Z, s' innalzi normale a questa la Q*q*, finchè giunga a tagliare in *q* la K*l*. Condotta in oltre per S, ove la Bβ sega la K L, una perpendicolare in *s* alla XZ, si descriva la *sq*. Dal punto *b* conduciamo ora la retta *bt* paralella alla *mn*, che seghi in *t* la *sq*. Sarà *t* projezione di quel punto, ove il nuovo piano dato interseca il raggio che passa pel punto projettato in B—*b*,

§. 37, P. I. Ora per aver l'altro punto corrispondente al punto γ, si condurrà per V la retta Vu perpendicolare in u alla X Z. Per u conducasi poscia la $u\,t'$ paralella alla $s\,t$, e per c la $c\,t'$ paralella alla $m\,n$. Nel punto t', ove si tagliano le due $u\,t'$, $c\,t'$, sarà la projezione di quel punto, nel quale il nuovo piano dato è incontrato dal raggio che passa pel punto corrispondente alle projezioni C — c.

Adunque la retta $t\,t'$ sarà projezione d'un lato dell'ombra che cade sul nuovo piano, cioè del lato corrispondente al lato $\beta\,\gamma$.

Conduciamo dal punto Y la Yy, perpendicolare in y alla X Z; indi si congiungano le rt, yt'; e la figura $r\,t\,t'\,y$ sarà sul piano II° projezione di quella parte dell'ombra che cade sul nuovo piano dato.

§. 82. Se questo piano fosse normale al piano I°, è chiaro che la Kq sarebbe perpendicolare alla X Z; e perpendicolari a questa sarebbero pure le $s\,t$, $u\,t'$.

Che se il detto piano fosse posto in luogo del piano II°, come si rappresenta nella seguente Fig. 43; in esso essendo data la projezione del solido, e quella d'una retta paralella alla direzione de'raggi, cioè la projezione $m'n'$, seguiremo lo stesso metodo superiormente indicato per determinare in questo caso, come prima, i punti t, t'; ed il contorno $r\,t\,t'\,u$ terminerà quella parte dell'ombra, la qual cade sul nuovo piano II°. Egli è manifesto che in questo caso per determinare i punti t, t' potremo valerci ancora del metodo insegnato dal §. 11, P. I. Fig. 43

§. 83. Come abbiamo trovate le ombre dei punti spettanti ad un contorno rettilineo, così potremo determinare quelle che corrispondano a punti d'un contorno curvilineo; onde qualunque sia la figura dell'oggetto proposto; e per conseguenza qualunque sia il contorno della sua ombra propria, potremo nell'indicata maniera determinare per punti il contorno dell'ombra projetta sopra qualunque piano.

E poichè in geometria è la stessa cosa determinare il

contorno dell' ombra, come determinare il contorno prospettico, §. 79, applicheremo nella determinazione dell' ombra tutte quelle considerazioni che furono fatte sopra la prospettiva, circa all' usare dei particolari espedienti che possono accorciare, ed agevolare in molti casi la costruzione.

Perciò osserveremo che se il contorno dell' ombra propria avrà lati paralelli, ed eguali, l' ombra projetta sopra un piano avrà pure eguali, e paralelli fra loro i lati corrispondenti, quando i raggi suppongansi paralelli. Ma i lati dell' ombra corrispondenti ai lati paralelli dell' oggetto concorreranno in un punto, se i raggi pongansi divergenti da un solo punto luminoso, ed obliquo ai lati dell' oggetto sia il piano che riceve l' ombra.

Se sarà un circolo, o una linea di second' ordine il contorno dell' ombra propria, una linea di second' ordine sarà pure il contorno dell' ombra projetta sopra d' un piano, come osservammo superiormente, §. 79.

Dal che si vede che non è opportuno il metodo di quegli autori, i quali per determinare l' ombra che produce un arco di forma circolare sopra una parete interna, e paralella al piano dell' arco stesso, insegnano a trovare per punti il contorno dell' ombra projetta; quando si può descrivere con somma prontezza, e precisione, essendo esso pur circolare.

Fig. 44 Si rappresenti quest' arco nella Fig. 44, ove la retta XZ rappresenterà in projezione sul piano I° la parete, su cui deve cader l' ombra.

I raggi siano paralelli alla retta projettata in $CC' - cc'$, e supponghiamo che l' arco sia projettato in $ACD - abd$, come pure in $C - c$ sia projettato il suo centro.

Poste queste cose, la retta projettata in $CC' - cc'$ sarà l' asse d' una superficie cilindrica, la quale contiene tutti i raggi, che passano per l' arco illuminato, e vanno a terminare il contorno dell' ombra sopra la parete. Questo contorno sarà l' intersecazione della detta superficie cilindrica col piano della parete; il quale essendo paralello al piano dell'

arco, la sezione sarà un circolo eguale, e paralello a quello che determina la figura dell'arco stesso. Il punto poi dove l'asse incontra la parete, sarà centro del detto circolo.

Perciò, trovato, §. 11, P. I., il punto c', ove l'asse incontra la parete, col centro c', e coll'intervallo C A, si descriverà un arco di circolo $\alpha\beta\gamma$, che toccherà in α il termine dell'ombra prodotta dallo spigolo verticale, che è projettato in A sul piano I°, e nella aM sul piano II°. Quest' ombra, come è manifesto, si determinerà conducendo per A una paralella A A' alla C C', ed elevando per A' la verticale A'α, che toccherà necessariamente in α il contorno circolare dell'ombra prodotta dall'arco.

§. 84. Al tronco cilindrico rappresentato dalle projezioni MNP — $mm'nn'$, sia sovrapposto a guisa di capitello un paralellepipedo rappresentato pure dalle sue projezioni RSTQ — $rstqq'r's't'$; e si dimandi la descrizione dell'ombra che il paralellepipedo manderà sopra la superficie del cilindro, essendo data per mezzo delle projezioni R Φ — $r\varphi$ una retta, cui debbano essere paralelli i raggi. Fig. 45

È chiaro che nel paralellepipedo, il contorno dell'ombra propria sarà composto dai lati, i quali corrispondono alle projezioni rispettive qr, rs, ss', $s't'$, $t'q'$, $q'q$ sul piano II°. Di questi lati, i due primi manderanno in parte la loro ombra projetta sopra la superficie del sottoposto cilindro.

Conduciamo paralelle alla R Φ due tangenti alla curva MNP ne' punti III, IV, le quali vadano ad incontrare in V, ed V' rispettivamente i due lati R S, R Q. Le parti projettate in RV, RV', saranno quelle delle quali l'ombra projetta cadrà sopra la superficie del cilindro.

Per R si conduca la retta RI, che incontri in I la curva MNP. Conducasi ancora per I la I ı normale alla X Z, che vada ad incontrare la $r\varphi$. Il punto ı dove s' intersecheranno queste due rette, sarà projezione del punto, ove si debbono incontrare i due lati del contorno dell'ombra.

Similmente condotta per V una normale alla X Z che

vada ad incontrare in u la qs, e pel punto III la normale $l3$, che incontri in 3 una paralella alla $r\varphi$ condotta da u, sarà rappresentato in 3 l' estremo dell' ombra prodotta dal lato projettato in RV. Così ripetendo l' operazione per quanti altri punti si voglia, tanto sopra questo lato, quanto sopra l' altro, si determinerà la projezione 3 1 2 4 ec. del contorno dell' ombra richiesta.

Egli è chiaro che in questo problema non altro si propone che di trovare l' intersecazione della data superficie cilindrica con due diversi piani, parimente dati; uno de quali è determinato dal lato corrispondente alle projezioni RS—rs, e dalla retta projettata in RI—$r1$; l'altro è determinato da questa retta medesima, e dal lato corrispondente alle projezioni RQ—rq. Se dunque la curva MPN sarà un circolo, o un'ellisse, le dette intersecazioni saranno di figura ellittica; e perciò gli archi 3 1, 1 4 saranno archi di ellissi, come si accenna nella figura. Volendo descrivere intera ciascheduna delle accennate ellissi, procederemo come ora mostrerò doversi fare per una di esse.

Sia quella che spetta al piano determinato dalla retta corrispondente alle projezioni RΦ—$r\varphi$, e dal lato corrispondente alle projezioni RS—rs. Si trovi il punto d' incontro della retta projettata in RΦ—$r\varphi$ col piano geometrico, e sia quel punto in Φ. Per esso conduciamo una retta ΦG paralella alla RS, e dal centro C del circolo MPN sia condotta una retta CG normale alla ΦG, che incontri col suo prolungamento in O la circonferenza MPN. Pongasi la mg eguale alla OG, e sia $m'k$ eguale alla distanza del punto O dalla RS.

Ciò posto, si conduca la retta kg che seghi ne' punti 5, 6, rispettivamente, le rette mm', nn'. Pel punto C si elevi una normale alla XZ, producendola a segare in c la kg, e per ciascheduno dei punti 5, c, 6 si conduca una paralella alla stessa XZ.

Elevisi ora per O una normale alla XZ che vada a sega-

gare in *o* la retta condotta per 5 paralella alla stessa X Z. Pei punti *o*, *c* condotta una retta *oco'*, che incontri in *o'* la retta condotta per 6 paralella alla detta X Z, sarà *o o'* un diametro dell' ellisse che rappresenta in projezione l'altr' ellisse obbiettiva, di cui parliamo. Sia il semidiametro C M perpendicolare alla retta GO, e per M conducendo una normale alla XZ, che vada a segare in *m* la paralella condotta per *c*, si otterrà in *cm* il semidiametro conjugato del precedente diametro *o o'*. Potremo dunque descrivere l' intera ellisse *o o' m*. Similmente si procederà, volendo descrivere anche l' altra, il cui centro si rappresenta in *c'*, e due diametri conjugati mostransi descritti nella figura, senza contrassegni di lettere, per evitare la confusione.

§. 85. Se poi sarà dimandata l' ombra propria del cilindro, è manifesto che questa dev' essere terminata dalle due rette projettate rispettivamente ne' punti III, IV, dove accadono i contatti della curva MPN con due rette paralelle alla RΦ. Adunque, sul piano II°, avremo le projezioni di que' due termini dell' ombra propria, conducendo due normali alla X Z pei punti III, IV; la prima delle quali è descritta nella figura, come quella che apparisce, essendo anteriore; l'altra rimane occulta. Perciò tutto il termine apparente della parte occupata dall' ombra, sarà il contorno 4213*l*.

§. 86. Si dimandi l'ombra che quest' oggetto medesimo manderà sopra una parete cilindrica projettata nella curva ABF sul piano I°.

L' operazione sarà la stessa, come si dovesse descrivere sopra la data superficie cilindrica la prospettiva paralella del contorno dell' ombra propria di ciascheduna parte componente l' oggetto.

Prendiamo dunque a considerare il solo paralellepipedo. È già stato indicato, §. 84, il contorno della sua ombra propria, della quale un lato corrisponde alle projezioni TS—*t's'*. Quel che diremo di questo lato si dirà di tutti gli altri.

Condotte per T, ed S le due TT', SS' paralelle alla RΦ,

finchè incontrino in T', S' la curva ABF, eleveremo le due normali T'τ', S'σ'; poscia dai punti corrispondenti t', s' condurremo due paralelle alla $r\varphi$, che seghino rispettivamente in τ', σ' le due normali predette, e saranno τ', σ' i due termini dell' ombra corrispondente al lato che si considera.

Col metodo medesimo potremo determinare quanti altri punti si voglia della linea $\tau' \varkappa \sigma'$; la quale è manifesto che sarà un arco d' ellisse, quando la curva ABC sia circolare, o ellittica, come più frequentemente suol essere. Non altrimenti determineremo pure gli altri lati $\tau' \downarrow \varphi'$, $\varphi \pi$, $\sigma \rho$. Per quanto spetta ai due lati $\varphi' \varphi$, $\sigma' \sigma$, è manifesto che debbon essere rettilinei, paralelli, ed eguali ai due corrispondenti che si rappresentano in $q' q$, $s' s$. L' analogia che ha questa parte della costruzione con quella eseguita nel §. 84, rende inutile ogni spiegazione ulteriore, quando si consideri attentamente la figura.

§. 87. Sopra un tronco cilindrico fingiamo posto un ovolo, sul quale posi in oltre un abaco, nel modo che si rappresenta dalla Fig. 46.

Fig. 46 L' anello compreso fra i due circoli concentrici HIK, EFG, rappresenterà sul piano I° la projezione della superficie curva dell' ovolo. L' interno circolo minore rappresenterà la projezione della superficie cilindrica sottoposta; ed il quadrato ABCD rappresenterà la projezione dell' abaco. E facile riconoscere sul piano II° le projezioni corrispondenti a ciascuna delle parti mentovate.

Siano BP — $b'p$ le projezioni d' una retta paralella alla direzione de' raggi; e vogliasi descrivere l' ombra projetta dell' abaco sopra l' ovolo, e di questo sopra il cilindro.

Due saranno gli orli, o spigoli, dell' abaco che mandano l' ombra sopra la superficie dell' ovolo, cioè quei due che sono projettati rispettivamente in BC—$b'c'$, AB—$a'b'$.

I termini di quest' ombra saranno formati dalle due linee d' intersecazione fra la superficie convessa dell' ovolo, e due piani, uno de' quali è determinato dalla retta corrispon-

dente alle projezioni BP $-b'p$, e dallo spigolo corrispondente alle projezioni AB$-a'b'$; l'altro è determinato dalla medesima retta, e dallo spigolo corrispondente alle projezioni BC$-b'c'$.

Per descrivere le projezioni della linea d'intersecazione fra questo piano, e la superficie dell'ovolo, si trovi il punto P, ove il piano geometrico è incontrato dalla retta corrispondente alle projezioni BP$-b'p$, e conducasi per P la PY paralella alla AD, e per M la MY perpendicolare in Y alla PY. Pongasi ancora la $\nu\mu$ eguale alla M N; e calata la $\mu\mu'$ perpendicolare in μ' alla XZ, si faccia $\mu'y$ eguale alla MY. Condotta la μy, essa comprenderà colla XZ l'angolo $\mu y \mu'$ eguale all'inclinazione dell'accennato piano col piano geometrico; e quindi la stessa retta μy rappresenterà la projezione di quel piano secante, descritta sopra un piano che passi per la MY, e sia normale al piano geometrico.

Il profilo poi dell'ovolo, che è descritto sul piano II°, rappresenterà la sezione fatta nell'ovolo stesso da quel piano normale ora indicato. Laonde tutta la sezione sarà projettata nella retta 1 o 4.

Conduciamo quante rette si voglia $\nu'n'$, $\nu''n''$, $\nu'''n'''$ paralelle alla $b'a'$, e terminate nel contorno dell'ovolo; indi prendiamo successivamente le distanze dell'asse $l\,l'$ dai punti 1, 2, 3, 4, nei quali le dette paralelle tagliano la μy, trasportando poi quelle distanze sopra la L M. Perciò sarà L IV eguale alla distanza del punto 4 dalla $l\,l'$; L II eguale alla distanza del punto 2; e così dicasi delle altre.

Pei punti I, II, III, IV, facciam passare altrettante perpendicolari alla MY, prodotte indefinitamente dall'una e dall'altra parte.

Fatte queste cose, col centro L, e con intervallo eguale alla metà della $n'\nu'$ si descriva un circolo, che seghi in Γ' e γ' la prima retta condotta per I: col centro medesimo, e con intervallo eguale alla metà della $\nu''\,n''$ si descriva un circolo che seghi in Γ'' e γ'' la seconda retta condotta per II; e così proseguasi per tutti gli altri punti che si crederà

necessario determinare; onde si descriva dall' una e dall' altra parte del punto N la projezione della curva che nasce per la predetta sezione; nella qual curva sarà in parte il contorno dell' ombra cercata.

Imperciocchè ciascheduna retta $n'v'$, $n''v''$ ec. rappresenta un circolo nato per la sezione che fa nell' ovolo un piano perpendicolare al suo asse, e ciascun punto 1, 2, 3, 4 ec. rappresenta un' ordinata comune ad uno dei detti circoli, ed alla sezione che si vuol descrivere.

Ora si osservi che, sul piano I°, la projezione del circolo rappresentato in $v''n''$ è un circolo descritto col centro L, e con intervallo eguale alla metà della $n''v''$, che eguaglia il suo diametro. Ma l' ordinata comune a questo circolo, ed alla sezione che si vuol descrivere, essendo projettata nel punto 2, è distante dal centro quanto il punto 2 è distante dalla ll'. Adunque la projezione di questa ordinata, o corda che dir si voglia, sarà la $\Gamma''\gamma''$; cioè a dire, i due punti Γ'', γ'' son projezioni di due punti che spettano all' accennata sezione.

Similmente ragionando sopra gli altri punti, si concluderà essere la curva $\Gamma'^{v}\,\Gamma'''\,\Gamma''\,1'\,N\,\gamma'\gamma''\gamma'''\gamma'^{v}$ projezione della sezione fatta nella superficie dell' ovolo dal piano che passa per la data retta projettata in BP—$b'p$, e per lo spigolo projettato in BC—$b'c'$. Nel modo stesso, descritta la μu che comprenda l'angolo $\mu u \mu'$ eguale all' inclinazione che ha, rispetto al piano I°, il piano determinato dalla medesima retta data, e dallo spigolo corrispondente alle projezioni AB—$a'b'$, si troverà l' altra linea $\Lambda R \lambda$, che è projezione della sezion fatta nella superficie dell' ovolo dal piano ora indicato.

Non è necessario mostrare minutamente come si trovino le corrispondenti projezioni sul piano II°, per descrivere la parte apparente del contorno, come si vede chiaro nella figura.

Le due curve le quali formano questo contorno s'incontrano in un punto r, giacchè in un punto projettato in

B—b' s'incontrano i due spigoli, dai quali procede l'ombra; ed in oltre quel punto rappresentato in r sarà il luogo ove l'ovolo è incontrato dal raggio che passa pel punto projettato in B—b'. Ma a compiere l' accidente dell' ombra che deve apparire nel proposto oggetto, interviene ancor l'ombra propria dell' ovolo; la quale si descrive nel modo insegnato, §. 75, considerando l' ovolo come una metà del toro. Adunque il contorno dell' ombra propria, e quello dell' ombra projetta dall' abaco s' incontreranno in un punto δ, ivi formando un angolo. Laonde lo stesso contorno dell' ombra propria manderà ombra sopra la superficie del cilindro, come abbiamo rappresentato pur chiaramente nella figura, ed il contorno di quest' ombra ultimamente indicata andrà a congiungersi col termine rettilineo che ha l' ombra propria del cilindro, formando un angolo con esso termine.

Il termine ωst dell' ombra projetta dall' ovolo sopra la superficie cilindrica, si potrà sempre descrivere con metodo geometrico, giacchè sappiamo determinare le projezioni di qualunque punto spettante al contorno dell' ombra propria, §. 75.

Ponghiamo che $\Sigma - \sigma$ siano projezioni d' uno di questi punti; e conduciamo per Σ la Σ S paralella alla B P, che incontri in S la circonferenza HIK. Per σ si conduca una retta paralella alla $b'p$, e per S una normale alla XZ. Nel punto s, dove s' incontrano quelle due rette, sarà la projezione del punto d'incontro fra la superficie cilindrica, ed il raggio che passa pel punto projettato in $\Sigma - \sigma$. Adunque s sarà un punto spettante alla projezione del cercato contorno. Similmente potremo determinare qualunque altro punto.

§. 88. Chi volesse rappresentare sul piano II° l'ombra projetta sopra un piano perpendicolare al piano I°, ed insistente sopra la retta X'Z', considerar dovrà che nel contorno di quest' ombra projetta si troveranno tutti i punti d' incontro del piano propoposto con quei raggi che passano pei termini delle ombre poc' anzi determinate.

Prendendo ad esaminare ciascuna parte distintamente, si vedrà che pel punto dell' ovolo rappresentato per le projezioni $\Delta - \delta$, passa un raggio il quale incontra lo spigolo rappresentato dalle projezioni BC—$b'c'$ in un punto che si rappresenterà per le projezioni K' — k'. Quello spigolo dunque manderà l' ombra sul proposto piano con la sola parte che corrisponde alle projezioni K'A — $k'a'$.

Questa parte del termine che avrà l' ombra cercata, si rappresenta in $\alpha' k''$, essendo α' la projezione del punto, ove il piano proposto è incontrato dal raggio che passa pel punto projettato in A—a', e k'' projezione del punto, ove il piano stesso è incontrato dal raggio che passa pel punto projettato in $\delta - \Delta$. Così pel punto projettato in t passa un raggio, che passa ancora pel contorno dell' ombra propria dell' ovolo, segando esso contorno in un punto che indicheremo in τ. Laonde sul piano proposto arriveranno i raggi che passano per l' arco rappresentato in $\delta\tau$, e determineranno coi loro punti d' incontro la curva $k''t'$. Per t' passerà una verticale, ove il piano proposto è incontrato da tutti i raggi che passano pel termine dell' ombra propria del cilindro, cioè per la retta rappresentata in tg.

Seguendo in tal modo sopra l'oggetto i termini che distinguono le parti illuminate dalle oscure, si discernerà successivamente ogni lato del contorno, dal quale dev' essere terminata l' ombra projetta sul piano proposto; e per quanto spetta all' operazione che è necessaria a determinar ciascun punto, non è mestieri che quì si ripetano le cose esposte già in tanti esempj, e specialmente nel §. 81; ma credo che basti la sola indicazione della figura.

L'intreccio di tante linee che furono necessarie in quest' esempio, e negli altri, per mettere in chiaro l' operazione pratica, ed il raziocinio corrispondente, non deve cagionar apprensione ai principianti. Imperciocchè se tutti questi ajuti son necessarj per esprimere il concetto dell' immaginazione, e per ajutarla a comprenderlo adeguatamente, raro è che in

pratica si esiga tutto il rigore d' una costruzione geometrica; ma non è raro che per mancanza di principj, e d'esercizio conveniente, s' intendano a rovescio gli effetti delle ombre, e si commettano molti errori, e molte assurdità, per fino nell' imitazione di quegli esempj che pongonsi innanzi agli occhi del disegnatore coll' ajuto dei modelli.

§. 89. Può accadere che una data superficie mandi con una sua parte l' ombra projetta sopra un' altra parte di se stessa. Un emisfero concavo esposto al sole si trova in questo caso. Tutti i raggi che passano per la circonferenza del circolo, che forma l' orlo dell' emisfero, ed entrano nella sua concavità, sono costituiti in una superficie cilindrica, la quale, relativamente alla superficie dell' emisfero, ha quelle condizioni che furono supposte nei §§. 73, 125, P. I. Conchiuderemo dunque che il contorno dell' ombra mandata dal proprio orlo sopra la superficie concava dell'emisfero, è un semicircolo massimo della superficie medesima; e per conseguenza la sua projezione esser deve una semiellisse, la quale può essere determinata col metodo del §. 73, P. I, ed anche più brevemente nella maniera che segue.

Si trovi l' angolo d' inclinazione che la retta projetFig. 32, P. I
tata in M N — *m n* forma col piano II°. Quella retta è paralella alla direzione de' raggi, e rappresenta l' asse della superficie cilindrica, ove sono contenuti i raggi dai quali è determinato il contorno dell' ombra.

Sia *nck* la trovata misura di quell' angolo, e per *q* si conduca una paralella alla *c k*, che seghi in un punto la circonferenza. Da quel punto sia condotta una normale alla *m n*; e suppongo che cada in *s*. Sarà *c s* il semiasse minore della cercata ellisse, ed il suo asse maggiore sarà un diametro del circolo che rappresenta la projezione dell'emisfero; cioè quel diametro appunto, il quale è perpendicolare alla *s c*. Si descriverà dunque intorno a quegli assi la semiellisse dimandata.

Da ciò si vede quanto sian lontane dal vero le costru-

zioni ripetute in alcune opere che trattano di questa materia, intorno alle quali pratiche ebbi già occasione di ragionare nel citato opuscolo, §. 126, P. I.

§. 90. Trovasi nella stessa condizione un cilindro cavo, il quale con una parte del suo orlo mandi l'ombra projetta entro la sua superficie concava.

Fig. 47 Si rappresenti per mezzo delle sue projezioni nella Fig. 47, ed AP — *ap* sian projezioni d' un raggio che passi per l' orlo, il quale suppongo essere ellittico, o circolare.

Perciò i raggi che vanno a determinare il contorno dell' ombra nella superficie interna, sono costituiti in una superficie cilindrica, la cui direttrice è l' ellisse, o il circolo corrispondente alle projezioni ABCD — *abcd*.

Adunque l' ombra di cui parliamo, sarà terminata dall' intersecazione della detta superficie con quella del cilindro obbiettivo proposto; e quest' intersecazione sarà generalmente un' ellisse, §. 128, P. I. Tali nozioni potrebbero servire a determinare, o gli assi immediatamente, o due diametri conjugati, se il caso lo richiedesse. Ma quando basti trovare alcuni punti, si osservi in primo luogo che la data retta corrispondente alle projezioni AP— *ap*, insieme con la generatrice della superficie cilindrica, che passa pel punto projettato in A — *a*, determinano un piano paralello alla direzione della luce; in secondo luogo che questo piano segherà la superficie cilindrica obbiettiva in una generatrice, almeno, nella quale dovrà essere il punto d' incontro del dato raggio, cioè della retta projettata in AP— *ap*, con la detta superficie cilindrica. Quel punto sarà dunque nel cercato contorno dell' ombra projetta. Sia condotta per A la projezione A $\mathcal{A}$ della generatrice accennata; ed essendo descritta l' intersecazione $\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}\,\mathcal{D}$ della data superficie col piano I°, il punto $\mathcal{A}$, dove la A $\mathcal{A}$ incontra la curva $\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}\,\mathcal{D}$, sarà nel piano I°. Si trovi, §. 11, P. I, il punto P dove la retta data incontra lo stesso piano I°, e conducasi la retta $\mathcal{A}$ P, la quale sarà l' intersecazione del piano I° col piano che si de-

determina per l'accennata retta projettata in AP—*ap*, e per la generatrice projettata in A$\mathcal{A}$.

Ponghiamo che la $\mathcal{A}$P seghi in $\mathcal{M}$ l'ellisse $\mathcal{ABCD}$; e per $\mathcal{M}$ dovrà passare quella generatrice, nella quale la superficie cilindrica sarà segata dall' accennato piano. Se dunque per $\mathcal{M}$ condurremo la retta $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ paralella alla $\mathcal{A}$A, in essa $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ sarà la projezione del punto d' incontro fra la superficie cilindrica, e la retta projettata in AP—*ap*. Questa projezione sarà dunque in III, dove si tagliano le due rette $\mathcal{M}\mathcal{M}'$, AP.

La projezione corrispondente sul piano II° dev'essere nella retta *ap*. Adunque, elevata per III una normale alla XZ, che incontri in 3 la *ap*, sarà 3 la seconda projezione cercata. Similmente potremo determinare quanti altri punti si voglia.

Ma principalmente importa determinare i due punti estremi del contorno cercato, il quale, per ciò che fu detto, dev' essere una semicirconferenza ellittica.

Ora egli è chiaro che quei due punti estremi saranno determinati dai due piani tangenti la superficie cilindrica obbiettiva, e paralelli alla direzione della luce.

Le intersecazioni di questi piani col piano I°, saranno paralelle alla $\mathcal{A}$P, e tangenti l' ellisse $\mathcal{ABCD}$. Conduciamo dunque le dette tangenti; ed i punti di contatto siano $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$. Per $\mathcal{F}$, ed $\mathcal{L}$ condurremo le due rette $\mathcal{F}$I, $\mathcal{L}$II, paralelle alla $\mathcal{A}$A che seghino in I, ed in II, rispettivamente, l'ellisse ABCD. I punti I, II saranno projezioni degli estremi cercati; e le corrispondenti projezioni sul piano II° si determineranno nel solito modo, conducendo per I, II due normali alla XZ, che vadano a segare ne' punti 1, 2 l'ellisse *abcd*.

§. 91. Esaminiamo un altro caso frequentissimo in pratica; ed è quello dell' ombra che la modinatura chiamata *Scozia* manda sulla propria superficie, che è concava in un senso, e convessa nell' altro.

Si rappresenti questa modinatura per mezzo delle sue projezioni *ardeb*, DGEQ^{IV}AFB. Il maggior circolo DGE Fig. 48

sarà sul piano I° la projezione dell' orlo inferiore rappresentato dalla retta *de* sul piano II°; ed il circolo minore ABF, sarà, sullo stesso piano I°, projezione dell' orlo superiore, rappresentato nel piano II° dalla retta *ab*.

In oltre è manifesto che la proposta superficie può generarsi per la rotazione del suo profilo *a r d* intorno all' asse rappresentato in *cc'*.

Quando i raggi suppongansi paralelli fra loro; ed uno di essi venga rappresentato dalle due projezioni MN—*mn*, è chiaro che il contorno dell' ombra di cui si parla, vien determinato dall' intersecazione della superficie proposta con una superficie cilindrica, la quale abbia per direttrice l' orlo superiore, e contenga tutti i raggi che passano per esso. L' asse di questa superficie cilindrica sarà la stessa retta corrispondente alle date projezioni MN—*mn*; le sue sezioni piane, e paralelle al piano I°, saranno altrettanti circoli eguali a quello che costituisce il detto orlo superiore; i loro centri saranno tutti nell' asse; le loro projezioni sul piano I° saranno altrettanti circoli eguali al circolo ABF; i centri di queste projezioni saran nella retta MN.

Le sezioni poi che i medesimi piani faranno nella superficie obbiettiva proposta, saranno pure altrettanti circoli posti coi loro centri nell' asse della superficie medesima; e perciò questi centri saranno tutti projettati nel punto C sul piano I°. Laonde le projezioni di essi circoli sul detto piano esser debbono altrettanti circoli concentrici ai due dati ABF, DEG.

Ciò posto, sia condotta una retta *rs* paralella alle *ab*, *de*, che seghi in *s* la retta *cc'*; in *r* la curva, o il contorno mistilineo *aord*; in 2 la retta *mn*.

Se nella *rs*2 intenderemo projettato un piano, il qual seghi, e la superficie obbiettiva proposta, e la superficie cilindrica già definita, sarà *sr* il semidiametro della sezione prodotta nella prima superficie, ed il punto 2 sarà projezione del centro spettante alla sezione prodotta nella superficie seconda.

Si cali dal punto 2 una normale alla XZ, prolungandola a segare in II la MN; indi col centro C, e coll' intervallo *sr* si descriva un circolo, che sarà projezione della sezione fatta nella superficie obbiettiva. Di nuovo col centro in II, e con intervallo eguale alla retta *c'a*, si descriva un altro circolo, che segherà in P'', Q'' il precedente. Adunque P'', Q'' saranno projezioni di due punti, che spettano al contorno cercato dell' ombra projetta.

Le projezioni di questi punti sul piano II° debbonsi trovare nella retta *rs*. Si elevino dunque le P'' *p''*, Q'' *q''* normali, alla XZ, che seghino in *p''*, *q''* la *rs*; e saranno *p''*, *q''* le accennate projezioni.

In modo simile potremo determinare quanti altri punti si voglia.

§. 92. Negli esempj recati sino ad ora, nei quali abbiamo posto essere paralelli fra loro i raggi, se fingiamo che questi partano in vece da un solo punto luminoso, non altro cangiamento si dovrà indurre, per rispetto alle costruzioni, fuorchè nelle rette che rappresentano i raggi. Perciò se nel primo caso si conducevano paralelle fra loro le projezioni di quelle rette sopra un medesimo piano, nel caso ora supposto si dovranno condurre a concorrere nella projezione del dato punto luminoso.

Nell' ultimo problema, se M—*m* siano le projezioni del dato punto luminoso, le rette MC—*mc'* saranno projezioni dell' asse di quel cono, che ha per vertice il detto punto, e per base il circolo rappresentato dalle projezioni *ab* — ABF. I punti I, II, III ec. saranno sul piano I° projezioni dei centri de' circoli, che nascono nel cono per le sezioni fatte in esso paralellamente al piano geometrico. Ma le circonferenze di questi circoli diverranno sempre maggiori in proporzione delle distanze MI, MII, MIII ec., come esige la natura del cono. Con quest' avvertenza si potrà applicare al nuovo caso la costruzione spiegata nel §. 91.

Nel problema del §. 90, mutando la condizione de' raggi paralelli in quella de' raggi divergenti da un dato punto, conformeremo la costruzione a ciò che fu detto nel §. 76, P. I, descrivendo le projezioni d' una retta che parta dal punto dato paralella alla generatrice della data superficie cilindrica, e trovando il punto, ove questa paralella incon-
Fig. 47 tra il piano I°. Nominiamo P cotal punto; e supposto che la projezione d' un raggio seghi in N la curva A B C D, condurremo per N la projezione N $\mathcal{N}^{\circ}$ della corrispondente generatrice, la quale incontri in $\mathcal{N}^{\circ}$ l' intersecazione $\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}\,\mathcal{D}$ della data superficie cilindrica col piano I°. Poscia pel punto P, e pel punto $\mathcal{N}^{\circ}$ condurremo una retta, che seghi in un altro punto $\mathcal{R}$ la detta curva $\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}\,\mathcal{D}$; e sarà $\mathcal{R}$ il punto che determina la generatrice della superficie cilindrica, ove accade l' incontro della detta superficie col raggio che passa pel punto dell' orlo projettato in N. Il rimanente della costruzione sussisterà come prima.

Ciò deve bastare per norma in qualunque altro caso analogo; nè di più aggiugnerò che un' osservazione; cioè che mutando in divergenti i raggi che furon posti paralelli, nell' esempio del §. 83, si avrà pure in un circolo il termine dell' ombra prodotta dall' arco proposto; se non che in vece che questo circolo eguagli quello che costituisce l' orlo dell' arco, sarà maggiore di esso. Nell' esempio del §. 89, si otterrà pure un semicircolo per contorno dell' ombra; perciocchè l' intersecazione della superficie sferica, e della conica contenente raggi che passano per l'orlo, sarà subcontraria, e produrrà un circolo minore. Nell' esempio del §. 90 si avrà un arco ellittico, come segue immediatamente dai §§. 127, 128, P. I, e non una semiellisse, come nella precedente ipotesi de' raggi paralelli.

Io stimo che chiunque avrà chiaramente intese le dimostrazioni, e le regole spiegate in questo capitolo, potrà acquistare, anche colla sola sua riflessione, tutta la pratica bisognevole per determinare, e rigorosamente con metodi geo-

metrici, e prossimamente a giudizio d'occhio, le figure delle ombre proprie che devono apparire in un dato oggetto, e delle projette che possono cadere in altri circostanti al primo, corrispondentemente alle date condizioni del lume.

Ciò nulla ostante non lascierò quest'argomento senza richiamare alla mente le principali nozioni elementari spiegate di sopra, analizzando gli accidenti dell' ombra in alcuni oggetti d'architettura, che più frequentemente occorre di dover rappresentare in disegno.

§. 93. Quella modinatura che si chiama ovolo, nelle cornici suol essere formata d' un quarto di cilindro convesso, cui sta sopra, e sotto, come termine, un listello. Fig. 49

Rappresentiamone l' ortografia nella Fig. 49, come suol dirsi dai pratici in angolo, affinchè si veggano più faccie; e la corrispondente icnografia s' intenda descritta sopra un piano orizzontale che passi per la retta xz, la quale rappresenta il termine del listello inferiore. BP — bp siano le projezioni d' un raggio. L'ombra che manderà il listello superiore projettato in B C, sopra la faccia anteriore dell'ovolo projettata in FHR, sarà terminata dall'intersecazione della detta faccia con un piano paralello alla direzione della luce, il quale passi per lo spigolo del listello corrispondente alla projezione B C sul piano geometrico, ed alla $b'c'$ sul piano ortografico. Quest' intersecazione è una retta linea paralella all' asse della superficie cilindrica, alla quale appartiene la detta faccia dell' ovolo; perciò rettilineo è il termine nn' dell' ombra ora accennata, e paralello alla retta $b'c'$.

Se la retta BP non coincida con la BF, non potrà cadere nello spigolo formato dalle due faccie dell' ovolo, l'ombra del punto rappresentato in b'; ma cadrà dall'una, o dall' altra parte di quello spigolo, in una delle due faccie. Noi supponghiamo che cada nel punto rappresentato in n. Laonde la parte nm del contorno che termina l' ombra, deriva dall'altro spigolo del listello, che non si vede nell' ortografia,

ed è rappresentato in BA sul piano geometrico. Quella parte *nm* spetta all' intersecazione d'un piano paralello alla direzione della luce, e condotto per lo spigolo ora indicato, con la superficie anteriore dell' ovolo; e tale intersecazione essendo trasversale, deve produrre un' ellisse; onde la linea *nm* è un archetto ellittico.

Nella retta *s s'* esprimesi il termine dell' ombra propria sopra la detta faccia anteriore dell' ovolo; il qual termine è nella linea di contatto fra un piano paralello alla direzione della luce, e la superficie dell' ovolo stesso.

Quando il punto rappresentato in *b'* non porta la sua ombra nello spigolo curvo *msty*, nemmeno il punto *s* porterà l' ombra projetta sopra lo spigolo rappresentato in *x y*, nè sopra l'altro inferiore, ma cadrà quest' ombra internamente da quella medesima parte dalla quale è caduto il punto *n*; e perciò si rappresenta in *u*.

Da *u* partirà dunque la retta *uu'* paralella alla *ss'*, e costituirà il termine dell' ombra projetta dall' ovolo sul piano inferiore.

La parte rappresentata in IDE ec. sul piano geometrico, è simile, e paralella all' altra parte rappresentata in FBCH, sopra la quale abbiamo ragionato fino ad ora. Adunque gli accidenti dell'ombra considerati sopra dell' una, intervengono ancora all' altra. Perciò si prolunga la retta *n n'* in *n'' n'''*, la *s s'* in *s'' s'''*, e la *u u'* in *u'' u'''*.

Mostrasi nella *df* il termine dell' ombra che lo spigolo rappresentato in *c d* manda sopra la contigua faccia del listello rappresentata in *dfe*. Nella curva *n'' s''* è il termine dell' ombra che quello spigolo medesimo manda sopra la superficie dell' ovolo, *n'' s'' s'''* ec. La parte dell' ombra proveniente da quello stesso spigolo sopra la parete inferiore, su cui fingiamo che posi l'ovolo, è terminata nella retta *φ c''*, e tutti gli accennati termini *df*, *n'' s''*, *φ c''* nascono dalle intersecazioni d' un piano condotto per lo spigolo *cd* paralellamente alla direzione della luce, prima col piano rappresen-

tato in $e\,d\,f$; poi con la sottoposta faccia dell' ovolo; finalmente con la parete inferiore.

Ora veggiamo come si trovi ciascheduno dei termini che abbiamo divisati. Trovisi il punto P, dove il supposto piano geometrico è incontrato dal raggio che si rappresenta per le projezioni BP—bp; e siano condotte le due rette PA, PA', una normale alla BA, l' altra alla BC. Sopra ciascheduna di queste rette concepiscasi elevato un piano verticale, che seghi la proposta modinatura. Le sezioni saranno ambedue simili, ed eguali a quella che rapprentiamo in $\beta\,\beta'\,\mu\,\sigma$ ec. Prendiamo a considerare separatamente ciò che nasce nella sezione fatta dal piano insistente sopra la retta A'P. Si produca la $\beta\,\beta'$, ad incontrare in α la $\alpha\,x\,z$, e facciasi la $\alpha\,\pi$ eguale alla A'P. La retta $\beta\,\pi$ rappresenterà l' intersecazione del piano insistente sopra la A'P con un piano paralello alla direzione della luce, che passi per lo spigolo rappresentato dalle projezioni BC — $b\,c$. Adunque se per β' sia condotta una paralella alla $\beta\pi$, che seghi in ν il quadrante $\mu\,\sigma$, questa retta rappresenterà l'intersecazione del detto piano, che nomino A' P, dalla retta A' P sulla quale insiste, e del piano paralello alla direzione della luce condotto per lo spigolo projettato in BC—$b'c'$; nella quale intersecazione è il termine dell' ombra projetta che si rappresenta in $n\,n'$.

Adunque il punto n si troverà comune alla $n\,n'$, che si conduce dal punto ν paralellamente alla $b'\,c'$, ed alla retta che dal punto b' sia condotta paralella alla $b\,p$. Con un ragionamento affatto simile troveremo il punto μ, facendo la $\alpha\,\pi'$ eguale alla AP, e conducendo per β' una retta paralella a quella che passa pei punti $\beta'\,\pi'$. Dal punto μ se conduciamo una retta $\mu\,m$ paralella alla $b'c'$, che incontri in m la curva, $m\,s\,y$, sarà m il punto ove principia quell' arco elittico $m\,n$; e per m dovrà passare la retta, che nella faccia occulta dell'ovolo termina l'ombra del listello superiore. Conduciamo ora una paralella alla $\beta\,\pi$, che tocchi in σ il profilo $\mu\,\sigma$; e movendo dal punto σ una retta paralella

alla $b'c'$, segneremo il termine $s\,s'$, e l' altro $s''\,s'''$ dell'ombra propria. Ma quella retta tangente andrà col suo prolungamento ad incontrare in ρ la parte inferiore del profilo, la quale rappresenta l' intersecazione della parete con quel piano secante eretto sopra la A' P.

Adunque il termine $s\,s'$ dell' ombra propria, come pure l' altro termine $s''\,s'''$, producono l' ombra projetta sopra la parete fino al termine $u\,u'$, ed all'altro $u''u'''$, i quali giacciono in una retta paralella alla $b'c'$, e condotta pel punto ρ.

Lo stesso risultato si otteneva conducendo una retta su paralella alla bp, e tangente il quadrante ellittico msy, che rappresenta lo spigolo formato da due faccie dell' ovolo.

Il punto che rappresenta l' ombra derivata dal punto s, dovendo essere e nella su, e nella $u\,u'$, si troverà nel punto u comune a queste due rette.

Se conduciamo paralella alla $\beta\,\pi'$ una tangente al profilo $\mu\sigma$, il punto di contatto τ rappresenterà un punto spettante al termine dell'ombra propria nella faccia occulta dell' ovolo; e condotta la $\tau\,t$ paralella alla $\sigma\,s$, che incontri in t la curva $m\,s\,y$, sarà determinato in t un punto, per cui passa la retta linea che termina l' ombra propria nella detta faccia occulta dell' ovolo. Produciamo la tangente, si che incontri in ψ lo spigolo rettilineo inferiore, e per ψ conduciamo paralella alla σs una retta $\psi\,h$, la quale incontri in h la retta $h\,i$ rappresentante uno spigolo della parete. Dovrà passare per h il termine dell' ombra che l' ovolo projetta sopra la faccia occulta della parete medesima. Adunque fra i due punti h, ed u deve cadere prima l'ombra projetta che deriva dall' arco $s\,t$, poi quella che deriva da una porzione del termine rettilineo dell' ombra propria che nasce sopra la faccia occulta dell' ovolo.

La prima sarà un arco ellittico, e la seconda una retta. Un estremo di quell' arco sarà in u; l' altro estremo si troverà conducendo per t una normale che seghi in T la projezione B F dello spigolo ellittico, e per T una paralella

al-

alla BP, che seghi in T' la T'Y; finalmente per T' una normale alla *xz*, che seghi in *t'* unaretta condotta per *t* paralella alla *bp*. Sarà *t'* l' altro estremo dell' arco ellittico. Congiunto poi col punto *h* il punto *t'*, per mezzo della retta *h t'*, sarà questa l' altra parte del termine intercetto fra gli estremi *h*, ed *u*.

Per quanto spetta all'ombra che manderà lo spigolo rappresentato in *c d*, osserviamo che i termini di quest' ombra sul piano *dfe*, e su quello della parete inferiore, sono rette linee fra loro paralelle, essendo paralelli i piani predetti. Il termine poi, che è nella superficie dell'ovolo, sarà un arco d' ellisse; perciocchè nasce dall' intersecazione trasversale d' un piano con la superficie dell' ovolo stesso.

Il piano rappresentato in *dfe* ha, sul piano geometrico, la sua projezione nella retta D E.

Adunque, prodotta la C Q paralella alla B P, fin che incontri in Q la D E, sarà Q projezione di quel punto, dove il raggio projettato nelle rette CQ—*cq* incontra il detto piano rappresentato in *dfe*, se fingiamo che sia prolungato fino ad incontrare il piano geometrico. Per tanto si elevi la normale Q*q*, la quale vada a segare in *q* la *cq*; e sarà *q*, sul piano verticale, la projezione del punto d' incontro testè accennato. Laonde una retta condotta per *d*, e per *q*, rappresenterà l' intersecazione del piano *dfe* col piano determinato dallo spigolo *cd*, e dal raggio che passa per *c*. Abbiamo dunque trovata in questo modo la direzione della *df*.

Ora prolunghiamo la CQ a segare in C' la retta KC', e si elevi la normale C' *c''*, che incontri in *c''* il prolungamento della *cq*. Con discorso simile a quello che abbiamo fatto intorno al punto *q*, conchiuderemo che il punto *c''* esprime l' incontro del raggio projettato in *cq* — CQ col piano della parete. Adunque per *c''* conducendo una retta *c''*φ paralella alla *df*, si avrà in essa *c''*φ il termine dell' ombra sul piano della parete.

Non parlerò sopra la maniera di descrivere la curva *n''s''*,

poichè non è necessaria l' esattezza geometrica; ma chi volesse procedere con tal rigore, applicherà a questo caso il metodo del §. 79, P. I, profittando della particolare circostanza, che la superficie curva, della quale ora trattasi, ha per generatrice una retta linea orizzontale.

Il rimanente contorno $c'' c''' n'^{v} s'^{v} u'^{v} j'$ si determinerà seguendo per analogia quel metodo che fu indicato nel §. 86; ed è chiaro che $c'' c'''$ è l' ombra che proviene dallo spigolo $c c'$: $c''' n'^{v}$ è quella che proviene dalla parte $c' r'$ dello spigolo $b' c'$, mentre il raggio che passa pel punto rappresentato in r', passa ancora per quello rappresentato in n' : $n'^{v} s'^{v}$ è l' ombra proveniente dall' arco $n' s'$ dello spigolo ellittico : $s'^{v} u'^{v}$ è l' ombra che proviene dalla parte $s' \omega$ della retta $s's$, che è termine all'ombra propria dell'ovolo; e si osservi che il raggio il quale passa per ω passa ancora per u'. Finalmente $u'^{v} j'$ è l' ombra che proviene dallo spigolo verticale $u'j$.

Dopo l' analisi così minuta del presente esempio, basteranno più brevi indicazioni sopra i seguenti.

Fig. 50 §. 94. La modinatura che appellasi *guscio*, nelle cornici, è formata da un quarto di cilindro cavo, che termina poi in un listello superiormente. Nella Fig. 50 rappresentiamo la projezione orizzontale, e la verticale di quest' oggetto, fingendo che il piano orizzontale passi per la $x z$, come nell' esempio antecedente; e ciò solo per evitare la lunghezza soverchia delle linee di costruzione.

Le rette BP, AP, A'P, $b' p$ conservano il significato, e l' ufficio che avevano prima, §. 93.

Il contorno $\beta \beta' \nu \mu \theta$ rappresenta la sezione fatta nella modinatura da un piano elevato verticalmente sopra la P A, o sopra la P A'.

La retta $\beta' \pi'$ rappresenterà l' intersecazione del piano innalzato sopra la PA col piano paralello alla direzione della luce, che passa per lo spigolo projettato in AB $- ab'$. Così la retta $\beta' \pi$ rappresenterà l' intersecazione del piano eretto sopra la A' P con quello che passa per lo spigolo projet-

tato in BC — $b'c'$, ed è paralello alla direzione della luce.

Laonde dal punto μ, ove la $\beta'\pi'$ sega il quadrante $\beta'\mu'\theta$, parte la retta μm, in cui sono i termini μm, $m'm''$ dell'ombra che manda lo spigolo ab' sopra la superficie $a\,b'\,h$ del guscio; e così lo spigolo $c'\,d'$ sopra la superficie $c'\,g\,f\,d'$.

Similmente dal punto ν parte la retta in cui sono i termini nn', $n''\,n'''$ dell'ombra proveniente dallo spigolo $b'c'$ sopra la superficie $b'hg$, e dello spigolo $d'e$ sopra la superficie $d'fk$.

Che ciascheduno dei menzionati termini debba essere rettilineo, si fa manifesto considerando che nasce per l'intersecazione della superficie cilindrica, e d'un piano paralello, non solamente alla direzione della luce, come ho accennato, ma ancora all'asse, ed alla generatrice della stessa superficie cilindrica. È facile vedere che lo spigolo $a\,b'$ cessa nel punto ω di mandar l'ombra sopra la superficie $ab'h$. Perciò la parte $\omega\,b'$ manda l'ombra sopra la superficie $b'hg$, ed il termine di quest'ombra sarà l'arco ellittico $m\,n$, essendo in m l'ombra mandata dal punto ω, ed in n quella mandata dal punto b'. Similmente l'arco ellittico $n'm'$ sarà l'ombra che manda sopra la superficie $c'\,g\,f\,d'$ la parte $\omega'\,c'$ dello spigolo $b'\,c'$; e l'arco ellittico $m''\,n''$ sarà termine dell'ombra che manda sopra la superficie $d'fk$ la parte $\omega''\,d'$ dello spigolo $c'\,d'$. Archi ellittici sono le linee mn, $m'n'$, $m''n''$; perciocchè nascono per l'intersecazione di superficie cilindriche, e di piani che sono obliqui agli assi, ed alle generatrici di esse superficie. In fatti l'arco $m\,n$ è nell'intersecazione della superficie cilindrica $b'c'gh$ col piano che passa per lo spigolo $a\,b'$, ed è paralello alla direzione della luce. Ma quello spigolo è perpendicolare al contiguo $b'c'$, il quale è in una generatrice della superficie cilindrica $b'c'gh$. Perciò la detta sezione è trasversale; nè può nascere da essa se non che un' ellisse. Similmente ragioneremo sopra gli archi $m'n'$, $m''\,n''$.

I termini 12, 34, II III, IV V dell'ombre che mandano gli spigoli inferiori del guscio sopra la parete, dipendono

manifestamente dai punti 1, I, il primo de' quali è l' intersecazione della retta I i, che rappresenta la sezione fatta nella parete dall' uno, o dall' altro dei piani eretti sopra le AP, A'P, e della retta θ1 condotta paralella alla $\beta' \pi'$; il secondo poi è l' intersecazione della medesima retta I i con l'altra retta θI, condotta paralella alla $\beta' \pi$. In II è l'ombra che parte dal punto h, ed in 2 quella che parte dal punto ε; onde la retta 2 II esprime il termine dell' ombra che manda sulla parete la parte εh dello spigolo θh.

Similmente i termini III 3, 4 IV corrisponderanno alle parti rispettive $g\varepsilon'$, $f\varepsilon''$ degli spigoli hg, gf.

§. 95. Le due gole, una chiamata *dritta*, e l' altra *rovescia*, si compongono di parti cilindriche, una concava, l' altra convessa, le quali nella retta in cui sono congiunte insieme, trovansi a contatto.

Questa poi è la differenza che passa dall' una all' altra gola, cioè che nella dritta la superficie concava è superiore, ed inferiore la convessa; al contrario nell'altra, superiore è la convessa, ed inferiore la concava.

In ciascheduna intervengono dunque gli accidenti dell'ombra, che abbiamo osservato appartenere al guscio, ed all' ovolo.

Per la qual cosa determineremo nella gola dritta l' ombra projetta dal suo listello superiore sulla superficie concava, come fu determinata l' ombra analoga nel guscio, §. 94. L' ombra propria della parte inferiore convessa, e l' ombra projetta che ne deriva, si determineranno come abbiam veduto doversi praticare nell' ovolo, §. 93.

Con ordine contrario, nella gola rovescia determineremo l' ombra projetta dal listello sopra la superior parte concava, come fu determinata l' ombra projetta dal listello dell' ovolo sopra la superficie di questo. Si determinerà ancora in questa gola l' ombra propria della parte convessa, come fu determinata l' ombra propria dell' ovolo. Ma il termine dell' ombra propria nella gola rovescia può mandar ombra projetta sopra la parte concava di essa; e quest' ombra si troverà

come abbiam trovata l' ombra projetta dal termine del listello nella superficie concava del guscio.

Considerando con qualche attenzione le figure 51, 52, si vedranno eseguite tutte queste cose, a parte, a parte. La prima delle citate figure esprime una gola dritta, e la seconda una gola rovescia.

§. 96. Le cose spiegate nei §§. 87, 88 contengono un esempio concernente l' ombra d' un capitello. Non mi estenderò dunque ad osservazioni più minute intorno a cotesto membro architettonico, e passerò all' analisi degli accidenti d' ombra che intervengono in una base.

Questi si rappresentano nella Fig. 53, ove MN—*mn* sono projezioni d' un raggio; l' angolo *ipq* è misura dell' inclinazione che ha un raggio col piano orizzontale. Fig. 53

La retta verticale *a a'*, ed il punto A, sono projezioni del termine apparente che ha l' ombra propria del tronco: l' altro termine corrispondente essendo occulto, non si descrive nella figura. Nella retta AB, e nella curva *a b* si veggono le projezioni della linea che termina l' ombra projetta dal tronco sopra la superficie dell' imo scapo. La continuazione di quest' ombra projetta sopra la superficie del toro, sarà terminata nella linea che si rappresenta dalla retta FC, e dalla curva *f c*.

La prima parte dell' ombra ora definita, cioè quella che apparisce sopra la superficie dell' imo scapo, ha per suo contorno, o limite, l' intersecazione della superficie medesima con un piano paralello alla direzione della luce, e tangente la superficie della colonna, che supponghiamo cilindrica, prossimamente.

Imperciocchè nella linea di contatto fra questa superficie ed il detto piano è il termine dell' ombra propria rappresentato dalla retta *a a'*; e nell' intersecazione del piano stesso con la superficie dell' imo scapo sono i punti d' incontro di quella superficie coi raggi che in essa cadono, dopo aver toccata la colonna.

Con simile ragionamento si prova che nel termine dell' ombra projetta, rappresentato dalla curva *fc* sul piano ortografico, e dalla retta F C sul piano dell' icnografia, debbono cadere que' raggi che incontrano la superficie del toro, dopo aver toccata la colonna.

Per non mancare all' esattezza, osserverò ancora che nè la curva *a b*, rigorosamente, dovrebbe essere uniforme, nè il termine A B dovrebbe essere tutto rettilineo. Imperciocchè il termine dell' ombra apparente sopra la superficie dell' imo scapo dev' essere composto di tre parti diverse. La prima di queste parti è un tratto di linea, ove accade il contatto fra alcuni raggi, e la superficie dell' imo scapo; la seconda parte è l'ombra projetta dalla linea or definita, sopra la superficie medesima; la terza finalmente è l' ombra projetta dal termine dell' ombra propria della colonna.

Le prime due parti, essendo sempre piccolissime, e quasi insensibili, non ho creduto che sia necessario distinguerle nel disegno.

Quella porzione dell' orlo superiore del listello, la quale è projettata nella retta *d'b*, e nell' arco D B, manderà l'ombra projetta sopra del toro; ed il termine di quest' ombra si rappresenta nelle due curve E F—*ef*. Il piccolo tratto di curva *de*, e la retta D E rappresentano il termine dell'ombra che manda sul toro la retta rappresentata in *d'd*, la quale è termine dell' ombra propria, che apparisce nella superficie del listello. Adunque il contorno *def* si congiunge nel punto *f* col termine *fc* dell' ombra projetta dal tronco della colonna sul toro. Tutto poi il contorno *defc* si congiunge nel punto *c* col termine apparente *hlgc* dell' ombra propria del toro.

Qualunque punto della linea projettata in A B—*ab*, o di quella projettata in F C—*fc*, o di quella projettata in D E—*de*, si può determinare seguendo i principj insegnati nel §. 79, P. I. Ogni punto della linea projettata in EF—*ef* si può trovare con una costruzione analoga a quella del §. 91.

§. 97. Veggiamo un ultimo esempio; e sia quello dell' ombra che manda nell' interna sua superficie una nicchia.

Suppongo il caso più frequente, cioè che la base sia semicircolare; per conseguenza la parete essendo cilindrica retta, la volta sia un quarto di superficie sferica concava. Fig. 54

Siano MN—*mn* le projezioni d' un raggio, ed immaginiamo compiuto il circolo *apkb*, nel quale rappresentisi tutto l' emisferio, cui appartiene la volta della nicchia rappresentata in *pabcp*. Troveremo la semiellisse che termina l' ombra prodotta dall' orlo circolare nella superficie concava dell' emisferio, nel modo insegnato, §. 73. P. I.

Questa circonferenza semiellittica segherà in qualche punto *g* la retta *pb*, che rappresenta il termine inferiore della volta, ed il principio della parete cilindrica. Ivi dunque termina l' arco ellittico *dg*, il quale contorna l' ombra projetta sopra la superficie concava della volta. Ivi pure incomincierebbe l'ombra sopra la superficie cilindrica, se non fosse interrotta dall'imposta; ed il suo termine sarà un arco di ellisse *gno*; ma rivolto colla convessità in senso opposto al precedente, come si vede nella figura. La porzione dell' orlo che produce l'ombra *dg* sarà determinata conducendo la retta *gh* paralella alla *cm*, che seghi in *h* il semicircolo *pab*. L' arco, *hd* intercetto fra 'l punto *h* ed il punto *d*, nel quale accade il contatto fra quel semicircolo, ed una retta paralella alla *mn*, sarà quello che si cerca. Dal rimanente arco *hp* proviene l'ombra terminata in *o*, essendo *o* l' ombra che manderebbe il punto *p* se non vi fosse l' interruzione dell' imposta. Egli è poi manifesto che la retta *ol* termina l' ombra prodotta dallo spigolo verticale *p*L. Il contorno dell' ombra cagionata dall' imposta, si descriverà seguendo la norma del §. 93; e coi medesimi principj si potrà segnare per analogia quel guizzo, o salto, che fa l' ombra dell' arco *hm* sopra i membretti dell' imposta, riflettendo che tanto la superficie

del listello, quanto quella della fascia, sono cilindriche; e quella del guscio è una superficie concava di rotazione.

§. 98. Dopo avere, o trovati per costruzione esatta, o immaginati per approssimazione, i termini dell'ombra, e dello sbattimento che apparir deve in un dato oggetto, se questo si rappresenti in prospettiva, i termini predetti saranno altrettante linee, delle quali pure è d'uopo descrivere le prospettive corrispondenti, acciocchè l'immagine apparisca opportunamente modificata dagli effetti dell'ombra.

Nè con ciò s'intende di obbligare il disegnatore a non mover linea che non sia stata determinata con rigore di compasso, e di regola; ma si vuole accennare sol tanto il mezzo sicuro di concepire con esattezza, per quanto è possibile, le forme, e gli accidenti di quelle cose che non sono presenti alla vista, e come tali debbonsi ciò nulla ostante rappresentare. Oltre di che, alle costruzioni geometriche ricorrendo ne' casi dubbj, e più complicati, o per la determinazione delle linee, e dei punti principali nel disegno, l'immaginazione troverà sempre e scorta per raddrizzare i falsi concetti, e soccorso per dirigere le parti subalterne del lavoro, con opportune regole di approssimazione.

§. 99. Noi abbiamo supposto che i raggi luminosi o siano paralelli, o partano da un punto unico; che è quanto fingere essi raggi provenienti sempre da un punto, o infinitamente lontano, o posto a distanza finita dall'oggetto illuminato. Nel determinare gli effetti dell'ombra projetta in quest'ipotesi, non interviene adunque la considerazione della grandezza che può avere il corpo d'onde emana la luce.

Ma se questa circostanza può trascurarsi nelle pratiche ordinarie, non dev'essere omessa quando si voglia formare un'idea esattissima di tutte le cause concorrenti a produrre gli accennati effetti.

Si richiami alla mente il concetto esposto nel §. 78, trattando dell'ombra propria, ed immaginiamo che il minor diame-

metro della sferoide sia posto nella retta che passa pei centri. Immaginiamo ancora una superficie involvente ambedue i solidi dalle medesime parti, la quale se sia toccata da un piano, il contatto estendasi per tutta la lunghezza indefinita d'una retta generatrice. §. 138. P. I. Cotesto piano dovrà dunque toccare esternamente e la sfera, e la sferoide; ed i punti del suo contatto coi detti solidi determineranno sempre la posizione d'una retta generatrice della superficie involvente, cioè a dire d'uno dei raggi estremi che incontrano la sferoide illuminata. Lo spazio ombroso sarà dunque terminato dal prolungamento di quella superficie al di là della sferoide. Fig. 42.

Per concepire con sufficiente chiarezza la forma della superficie involvente, sembrami opportuno paragonarla ad un' altra, che le rassomiglia per più rispetti, ed è più facile da immaginare. S'intenda una serie di piani condotti per la retta S C. In ciascuno di essi siano descritte le due rette che toccano esternamente ambedue le sezioni, cioè quella della sfera, e l'altra della sferoide. Le due tangenti concorreranno in un medesimo punto della retta S C prolungata quanto è mestieri. Ma in ogni piano secante il punto di concorso muterà sito sopra la retta S C; talchè quando passerà per l'asse M N dell'ellisse che genera la sferoide, le due tangenti concorreranno in P, e quando sarà perpendicolare all'asse medesimo, le tangenti concorreranno in Q.

I punti di concorso delle altre tangenti, saranno compresi tutti fra P, e Q; ed è facile vedere che in ogni punto assegnabile fra i termini P, Q, sempre concorreranno quattro tangenti, o generatrici.

Seguendo con qualche attenzione la serie di queste generatrici, scorgesi di leggieri che, posto l'asse M N della sferoide minor del diametro della sfera, le sezioni che farà nella superficie ora descritta un piano perpendicolare alla retta S C, e posto successivamente tra F e Q, in Q, tra

Q e P, in P, oltre P, s' assomiglieranno alle figure A, B, C, D, E.

Ma questa superficie non potrà essere in contatto con un piano, sempre per tutta la lunghezza d' una sua generatrice. Non avrà dunque la vera forma della superficie involvente.

Si osservi che in generale la retta condotta pei due punti di contatto fra un piano, e le due date superficie, sferica, e sferoidica, cioè la vera generatrice della superficie involvente e tangente, non potrà segare la retta S P, fuorchè ne' due soli casi che il piano tangente passi o per P, o per Q. Due generatrici che tocchino in due punti simili le due porzioni sferoidiche projettate, una in C F N, l' altra in C F M, e poste da una medesima parte rispetto al piano S M N P, concorreranno dalla parte opposta in un medesimo punto del piano condotto per la S P, normale alla M N.

In oltre due generatrici, che tocchino in punti simili le due porzioni sferoidiche projettate in C M F, concorreranno in un punto del piano S M N P dalla parte M per rispetto alla S P; e dall' altra parte concorreranno le due generatrici tangenti in punti simili le porzioni sferoidiche projettate in C F N.

Segue da ciò che la figura della sezione fra P e Q non riuscirà somigliante alla C; ma più presto alla E, se in questa s' inflettano alquanto gli archi, superiore, ed inferiore, verso il centro.

Somiglieranno poi, come prima, alle B, D rispettivamente le due sezioni in P, Q; ed un contorno annodato quasi a foggia di caducèo avranno le sezioni fatte in prossimità dei termini P, Q, fuori della P Q. Ma di coteste indagini, che allettar possono la curiosità del Geometra, non è mestieri di più, a mostrare la varietà delle figure che può aver l'ombra projetta sopra un piano, dalla sferoide illuminata secondo le supposte condizioni.

CAPITOLO VII.

Delle Penombre.

§ 100. Non è immediato il passaggio dalla parte totalmente illuminata di un oggetto a quella totalmente adombrata, se non dove il contorno dell'ombra propria coincida con qualche spigolo formato da due faccie dell' oggetto, come avviene in tutti que' corpi che sono terminati da faccie discontinue. §§ 67, 76, 77. Ma eccetto questa circostanza, fra 'l contorno dell' ombra propria, e la parte totalmente illuminata della superficie obbiettiva, è sempre uno spazio che non può dirsi nè in ombra del tutto, nè del tutto illuminato.

Quando per esempio da un punto della superficie terrestre si vede nascere, o tramontare il sole, il quale non abbia tutto il suo disco sopra l'orizzonte apparente di quel punto, questo non può dirsi allora totalmente illuminato; ma quanto minore è la parte del disco solare che sovrasta al piano dell' orizzonte, tanto più s' accosta quel punto all' ombra propria; per lo contrario si accosta vie più alla totale illuminazione di mano in mano che s' alza il disco su quell' orizzonte. Laonde allorchè il suo piano tocca il sole, in quell' istante entra il punto supposto o nel campo totalmente illuminato, o nell' ombra.

Si dica totalmente illuminato un punto che giaccia nella parte illuminata dell' oggetto, quando per esso punto conducendo un piano tangente l' oggetto, il piano non seghi il corpo luminoso.

Chiamisi poi *penombra propria* quel grado intermedio fra l' ombra, che è la privazione d' ogni luce diretta, e la totale illuminazione.

Ciò posto, immaginiamo generarsi da una linea retta una superficie, che involga e tocchi alternamente il corpo luminoso, e l' oggetto illuminato. § 138. P. I. Un piano, che per qualunque punto dato fuori dei due menzionati solidi, sia condotto a toccarli alternamente, determinerà sem-

pre co' suoi punti di contatto la posizione d'una generatrice della superficie involvente.

Sarà dunque determinato ogni punto di quella linea in cui si toccano la superficie involvente, e l'oggetto illuminato. In cotesta linea finirà la penombra propria.

Perciò lo spazio occupato da essa penombra, sarà terminato da una parte nel contorno dell'ombra propria, § 67; dall'altra parte nella linea di contatto fra l'oggetto medesimo, e la superficie che involge e tocca alternamente l'oggetto, ed il corpo luminoso; la qual linea si chiamerà *contorno della penombra propria*.

Fig. 55 § 101. Sia rappresentata nel circolo E F R una sfera luminosa, ed una sfera illuminata si rappresenti dal circolo P D *r*. Passi la retta A C pei due centri A, C, e sian condotte le tangenti comuni, una esterna E D, l'altra alterna O V, che seghi in T la A C. Condotte perpendicolari a questa le due corde P O, D*d*, la zona sferica rappresentata dalla figura OPD*d* sarà occupata dalla penombra. §§ 100, 67.

Se il circolo *r* P O sia minore dell'altro E F R, l'arco P D sottenderà un maggior angolo che l'arco E V; se i due circoli divengano eguali, eguali pur saranno gli archi P D, E V; reciprocamente sarà l'angolo sotteso da E V maggior che quello sotteso da P D, se il circolo *r* P O divenga maggiore dell'altro E F R.

Adunque, se non varii la distanza de' centri, l'ampiezza della penombra propria crescerà; o scemerà quanto più cresce o scema la grandezza della sfera luminosa in confronto dell'altra illuminata.

Da ciò veggiamo perchè le separazioni del lume dall'ombra sono più *spedite*, come dicono quei dell'arte, se il lume parta da una candela, che se provenga da una fiamma di gran volume, in parità di distanza.

§ 102. L'arco P D, che misura l'ampiezza della penombra, sottende al centro A un angolo eguale all'angolo d'inclinazione formato dalle due tangenti in P, ed in D. Quest'

angolo scema crescendo la distanza dei centri A, C, e rimanendo immutati i diametri delle due sfere.

Adunque l' ampiezza della penombra scemerà, quanto più cresca la distanza del corpo luminoso dall' oggetto illuminato.

Se nella sfera FRE si rappresenti il sole, l' angolo compreso dalle due tangenti *u* P, ED sarà la misura angolare del diametro apparente di quest'astro. E perchè l' ampiezza media di cotal angolo può stabilirsi di trenta due minuti primi, ne segue *che esposta all' illuminazione solare una superficie sferica di qualunque grandezza, l' ampiezza della penombra propria sarà sempre un mezzo grado, prossimamente, del suo circolo massimo.*

§ 103. Nella superficie sferica la penombra è contenuta fra due circoli paralelli; onde l' ampiezza sua è costante tutto all' intorno.

Non è altrimenti in una superficie di rotazione, quando tale sia pur quella del corpo raggiante, e comune sia l' asse di ambedue le superficie.

Accade pure lo stesso in una superficie cilindrica, ove i termini della penombra propria sono due rette paralelle fra loro.

Ma se all' illuminazione d' una sfera raggiante espongasi un solido terminato da tal superficie, che nel luogo ove cade la penombra propria, non abbia curvatura costante, l' ampiezza della penombra varierà da punto a punto, secondo che varii la curvatura della superficie illuminata.

Fingiamo che la sfera illuminata, sulla quale abbiam ragionato di sopra, si muti in una sferoide. Se l' asse trovisi nella retta condotta pei centri, in quest'unico caso sarà eguale tutt' all' intorno l' ampiezza della penombra; perciocchè tanto il contorno dell'ombra propria, quanto quello della penombra, è un circolo perpendicolare col suo piano alla retta de' centri. § 67, e § 131. P. I.

Ma consideriamo in qualunque altra posizione, la sferoide, come sarebbe in quella che si rappresenta dall'ellisse DO*r*, la quale esprima la projezione della sferoide predetta. Fig. 56

Conducansi le tangenti esterne ED, F*d*, e le alterne

V O , *u o*. Non potrà, generalmente, essere l'arco D *o* eguale all'altro *d* O .

Ma quanto maggiore si porrà la ragione della distanza A C al diametro della sfera raggiante, tanto minore sarà ciascuno degli angoli formati, uno dalle due tangenti *d* F, V O, ed uno dalle due tangenti E D, *u o*; questi poi s'accosteranno tanto più all' eguaglianza .

Ponendo dunque assai piccoli i detti angoli, gli archi *d* O, D *o* potranno, senza error valutabile, esser tenuti come archi circolari; e quindi il secondo D *o*, perchè più vicino all' estremo del maggior diametro, sarà minore del primo *d* O . Dalla quale analisi possiamo tosto conchiudere *che nell' illuminazione prodotta dal sole, ove l' angolo compreso da due tangenti estreme è prossimamente di* 32', *sarà tanto più stretta, o spedita la penombra, quanto più, nel luogo ove cade, sia convessa la superficie obbiettiva; ed in una medesima superficie crescerà, o scemerà l' ampiezza della penombra da punto a punto, di mano in mano, che proceda decrescendo, o crescendo la curvatura in essa superficie* .

Questo principio servirà pure di norma per regolare le penombre, le quali accompagnano l' illuminazione prodotta da qualche altro lume .

§. 104. Siccome il passaggio immediato dalla parte illuminata alla parte oscura, nella superficie apparente d'un oggetto, è indizio visibile della discontinuità di cotesta superficie, così il passaggio graduato per mezzo della penombra, è visibile indizio di continuità; e l' ampiezza minore, o maggiore di quello sfumamento che rappresenta la penombra, fa che si giudichi maggiore, o minore la convessità della superficie obbiettiva . Tanto dunque importa assegnare opportunamente la debita ampiezza della penombra, che un errore notabile in questa parte, potrebbe difformare l'immagine d' un oggetto, quantunque il suo contorno fosse stato ottimamente disegnato .

§. 105 . L' effetto della penombra accompagna ancora le ombre projette, i contorni delle quali sfumansi tanto più lar-

gamente, quanto più s' allontana l' ombra dal corpo che la produce; onde è regola generale *che questi contorni siano tanto più spediti, o precisi, quanto più son vicini all' origine loro*.

Facilmente comprendesi la causa di tale effetto, richiamando alla memoria quelle due superficie involventi, per le quali sono determinati nella superficie obbiettiva i contorni dell' ombra, e della penombra. §§. 67, 100.

Coteste due superficie involventi comprendono uno spazio, fra i loro prolungamenti oltre all' oggetto illuminato, nel quale spazio non può assegnarsi alcun punto tra l' una e l' altra superficie, da cui possa essere veduto tutto intero il corpo luminoso; ma tanto minor parte di esso potrà vedersi, quanto più il punto supposto sarà vicino alla superficie che termina lo spazio dell' ombra.

Per conseguenza, sul corpo che riceve l' ombra projetta, non si farà passaggio immediatamente dalla parte illuminata a quella coperta dall'ombra; ma vi avrà come un lembo, nel quale dovrà decrescere gradatamente l' illuminazione, fino al contorno predetto dell' ombra. Lo spazio occupato da questo lembo avrà da una parte per suo termine il contorno di essa ombra projetta, cioè la linea d' intersecazione fra la superficie dell' oggetto su cui cade l' ombra, e quella che involge esternamente l' oggetto da cui parte l' ombra, ed il corpo luminoso; dall' altra parte poi avrà per suo termine la linea d' intersecazione fra la superficie dell' oggetto adombrato, e quella che involge alternamente l' oggetto onde parte l' ombra, ed il corpo luminoso. Noi chiameremo *penombra projetta* quest' accidente, che accompagna i contorni delle ombre projette.

È facile intendere che le due menzionate superficie involventi divergono, l'una dall' altra; e quindi lo spazio da esse terminato s' allarga di mano in mano che l' ombra allontanasi dal corpo che la produce. Quando il corpo luminoso è maggiore dell' altro illuminato, lo spazio ombroso và successivamente ristringendosi, di mano in mano che si prolunga; ma intanto lo spazio contenuto da quella superficie che involge alterna-

mente i due corpi, acquista sempre maggiore ampiezza. In queste circostanze si vede acuminarsi l'ombra projetta da una colonna sul pavimento, mentre s'allarga dall'una, e dall'altra parte lo sfumamento del contorno, cioè la penombra. E se fingiamo per un altr'esempio assai chiaro, che tanto il corpo luminoso, quanto l'illuminato sia sferico, le due superficie involventi saranno coniche; ma posta la sfera illuminante maggiore dell'altra illuminata, la superficie conica esterna porterà il suo vertice al di là della sfera minore illuminata, mentre l'altra superficie conica ha sempre il vertice fra i due centri. Se dunque si taglino ambedue queste superficie coniche fra l'oggetto, ed il vertice della prima, la sezione in essa sarà sempre minore, quanto più s'accosterà al suo vertice, ove diverrà un semplice punto; ma la sezione fatta nella seconda sarà tanto maggiore, quanto più lontana dal principio dell'ombra.

Fig. 55 Lo spazio compreso fra le due tangenti esterne ED, F*d* rappresenta quello che è occupato dal cono dell'ombra. L'altro spazio compreso dalle tangenti alterne TP, TO rappresenta quello che è occupato dal cono della penombra. La sezione HL rappresenta il diametro dell'ombra projetta sopra un piano secante. La retta MN rappresenta il diametro che avrà il contorno della penombra.

Poichè vedemmo che l'angolo d'inclinazione compreso dalle due tangenti PN, DL, quando l'illuminazione proviene dal sole, è prossimamente di mezzo grado, appena discernibile sarà la dimensione LN, in prossimità dell'oggetto che manda l'ombra; cioè il contorno di essa ci apparirà preciso, perchè impercettibile sarà lo spazio occupato dallo sfumamento della penombra.

§. 106. Alla grandezza del corpo luminoso, ed alla sua distanza dagli oggetti illuminati, dobbiam pure attribuire quell'alterazione di figura, che accader suole nei contorni delle ombre projette; talmente che, di rettilinei ch'esser dovrebbero divengono talvolta curvi, e scompariscono i loro angoli, e la loro discontinuità.

Abbiamo famigliari esempj di quest'effetto, quando in una

una stanza entra un raggio di sole per qualche fenditura delle imposte. Benchè la detta fenditura sia rettangolare, la sua immagine che portasi dalla luce sul pavimento, o sopra una parete alquanto lontana, comparisce frequentemente di figura ellittica; e se la differenza dei lati del rettangolo non è molto grande, la detta immagine assai volte comparisce circolare.

Per dimostrarne la ragione, è d'uopo riflettere che ogni punto assegnabile nel contorno del pertugio, che noi supporremo rettangolo, diviene il vertice d'un cono, che ha la sua base nella superficie raggiante, e contiene tutti i raggi, i quali cadono sopra quel punto. Quanti sono dunque i punti assegnabili nel detto contorno, altrettanti, cioè infiniti, sono i coni lucidi, i quali avendo i vertici in quel contorno, si producono nell' interno della stanza, e vanno ad incontrare il pavimento, o la parete, o qualunque altra superficie, su cui formano l'immagine di quel contorno, colle intersecazioni delle loro superficie, e dell' altra da essi incontrata. Se questa è piana, le sezioni saranno in generale altrettante ellissi. Adunque il contorno dell' immagine non sarà veramente composto di rette linee, ma di archi ellittici. Quando il piano è assai vicino al pertugio, le indicate ellissi sono assai piccole, e presso che impercettibili, §. 105.

Quelle che appartengono ai coni, i quali hanno i loro vertici in un medesimo lato del pertugio, non possono rendere sensibilmente diversa da una retta la serie dei loro archi. Ma gli archi delle sezioni, che appartengono a' coni posti coi loro vertici presso agli angoli del pertugio, ed altri in un lato, altri nel lato contiguo, s' incatenano in una serie continua, la quale non può serbare l' immagine dell'angolo rettilineo. Perciò, ingrandendo le sezioni, quanto più scostasi il piano dal pertugio, arrivano finalmente a trasformare il contorno rettilineo in una serie continua d' infiniti archetti, che alla vista comparisce una sola curva uniforme, ed assai spesso un circolo.

Fig. 57 Nella Fig. 57 il rettangolo ABCD rappresenta l'immagine del pertugio, come se i raggi fossero rigorosamente fra loro paralelli. Fingesi il piano perpendicolare alla direzione de' raggi; e quindi suppongonsi circolari le sezioni fatte nei coni, ed i centri nei lati del rettangolo. Il contorno, che si compone dalla prima serie di circoli minori, rappresenta il contorno dell' immagine in una certa distanza. L'altro contorno, che si compone dai circoli maggiori, esprime quello dell' immagine in una distanza maggiore.

Dalle quali considerazioni concluderemo *che i contorni delle ombre projette voglion essere con particolare attenzione espressi col debito grado di esattezza in piccole distanze dalla loro origine. Ma nelle distanze maggiori stender si debbon le masse degli sbattimenti, senza precisione di contorni.*

CAPITOLO VIII.

Sopra la gradazione dei lumi.

§. 107. Se i raggi, i quali producono l' illuminazione, fossero veramente paralelli fra loro, due piani esposti alla luce in distanze eguali dall' origine di essa, ma con diversi angoli d' inclinazione rispetto ai raggi, riceverebbero gradi d' illuminazione proporzionati ai seni degli angoli predetti.

Fig. 58 Imperciocchè si rappresenti in CR un raggio; CA rappresenti un piano ad esso perpendicolare, e CB un altro piano inclinato secondo l' angolo BCR. Siano eguali, e simili fra loro le aree dei due piani, che supporremo rettangoli, ponendo eguali le due rette AC, BC.

È chiaro che la quantità di luce cadente sul primo AC, alla quantità cadente sul secondo BC, sarà nella proporzione delle due rette AC, SC, delle quali la seconda è intercetta dalle CR, BS, fra loro paralelle. Ma se nominiamo φ l' angolo BCR, abbiamo la proporzione BC : CS :: 1 : sen.φ.

Adunque, essendo la retta BC eguale all' A C, sarà la quantità di luce cadente sopra l'area AC alla quantità cadente sopra l'area BC, come il seno tutto al seno dell'angolo B C R.

Quella quantità di luce, che arriva sopra ciascheduna delle due aree suddette, si distribuisce egualmente ad ogni punto di esse. Adunque ogni punto fisico della prima riceve un tal grado d' illuminazione, che sta a quello d' ogni punto fisico della seconda, nella ragione predetta.

Quindi segue che *due piani diversamente inclinati rispetto alla direzione de' raggi, ma ugualmente distanti dall' origine di essi, riceveranno l' illuminazione proporzionata ai seni degli angoli d' inclinazione.*

§. 108. Ogni menoma parte d' una superficie curva, considerandosi come costituita in un piano tangente quella superficie curva, si dovrebbe concludere da questa, e dalla precedente ipotesi, §. 107, che i gradi d'illuminazione sopra una superficie curva, procedano secondo i seni degli angoli d' inclinazione, formati dai raggi coi piani tangenti la superficie stessa, ne' varii punti illuminati.

Sussistendo poi colle due predette ipotesi la ragione dei decrementi che soffre la luce, cioè l' inversa dei quadrati delle distanze, ne seguirà la regola che *due piani diversamente distanti dall' origine della luce, e diversamente inclinati alla sua direzione, ricevono gradi d' illuminazione, in ragion composta dalla diretta dei seni sopra menzionati, e dall' inversa dei quadrati delle distanze.*

§. 109. Ora fingiamo che la luce provenga da un punto matematico; e in quest' ipotesi dovrebbe diradarsi colla ragione dei quadrati delle distanze, sebbene altre cause, fuorchè la divergenza naturale de' raggi, non intervenissero ad alterare la loro intensità, e la direzione.

Oltre di che, non solamente ne' varii punti d' una superficie curva, ma ancora ne' varii punti d' un piano esposto all' illuminazione, varierebbe l' inclinazione de' raggi;

e quindi ancora il grado dell' illuminazione dipendente da questa circostanza .

Fig. 59 Si rappresenti in I il punto raggiante , ed in P M un piano rettangolo , minore di qualunque assegnabile . Fingasi questo perpendicolare alla retta C I , la quale rappresenta un raggio cadente sul centro del rettangoletto .

Condotte le rette M I , P I , si rappresenterà nel triangolo P M I una piramide composta dai raggi cadenti sul detto rettangolo .

Perchè l'angolo MIP si pone minore di qualunque assegnabile, potremo considerar come paralelli tutti i raggi cadenti sopra l' area rappresentata in P M ; e quindi come distribuita egualmente l' illuminazione su tutti i punti dell'area stessa.

Pongasi in oltre la retta *p m* eguale alla P M , divisa per mezzo nel punto C , ed inclinata alla C I ; nella qual retta *p m* si rappresenti un rettangoletto eguale, e simile al precedente P M . Conduciamo ancora la *m n* perpendicolare alla C I , ed intercetta dalle due *m*I , *p*I .

Nel triangolo *mp*I si rappresenterà la piramide composta dai raggi cadenti sopra quel rettangoletto *p m*; e se nella retta *mn* si rappresenti una sezione fatta in quella piramide con un piano perpendicolare alla retta C I , l' area di tal sezione all' area P M, o *pm*, avrà una ragione quanto si voglia prossima alla ragione del seno dell' angolo *m* C I, cui nomino φ, al seno tutto . Se dunque , attesa la piccolezza dell' area P M , abbiam considerato come paralelli i raggi cadenti sopra di essa , potremo ancora suppor paralelli quelli che arrivano sopra la *mn* ; e prendendo le quantità di luce proporzionali alle aree che la ricevono , sarà, quanto prossimamente si voglia , la quantità che arriva sopra l' area P M alla quantità che arriva sopra l' area *mn*, come 1 : sen.φ . Ma la luce che passa per la sezione *mn*, si distribuisce egualmente sopra l' area *pm* , che eguaglia la P M ; dunque l' intensità dell' illuminazione sull'area PM all' intensità sull' area *mn* sarà nella predetta ragione 1 : sen.φ .

Segue da ciò che nell' ipotesi or ammessa, *le intensità dell' illuminazione sopra i varii punti d' una superficie piana, o curva che sia, procederanno in ragione composta dall' inversa dei quadrati delle distanze, e dalla diretta dei seni delle inclinazioni, come superiormente*, §. 108.

§. 110. Alle condizioni della prima ipotesi, §. 108, accostasi l' illuminazione prodotta dal sole, ed a quelle della seconda, §. 109, s'accosta tanto più l'illuminazione prodotta da qualunque altro corpo raggiante, quanto più piccole sono le sue dimensioni, comparate alla distanza del corpo che riceve il lume. Questa proposizione, che sembra derivare evidentemente dalle cose anzi dette, richiede nondimeno più accurato esame, per conoscere il grado di fiducia ch'essa merita nell' applicarla alle pratiche.

Ogni punto d' una superficie raggiante, o di luce propria, o di luce riflessa, è come un centro, dal quale diffondonsi per ogni verso i raggi; onde tutti quelli che arrivano sopra un dato elemento di qualche superficie da essi illuminata, costituiscono una piramide, che ha nel supposto punto raggiante il suo vertice, e nella superficie del dato elemento la sua base.

Se le differenze fra le distanze dei punti raggianti dall' elemento illuminato non siano valutabili: ciò che interviene qualunque volta la mole del corpo raggiante è piccola assai, in comparazione della sua distanza dall' elemento illuminato; se in oltre la luce emessa dal punto raggiante avesse eguale intensità in tutte le direzioni, allora l' illuminazione che proviene dai punti assegnabili nel corpo raggiante sopra l' elemento illuminato, seguirebbe manifestamente la ragione suddetta dei seni.

Ma le dimostrazioni di Bouguer (1), e di Lambert (2), ci

(1) Traité d'optique sur la gradation de la lumiere. Paris 1760, L. I, Sect. II.

(2) Photometria, sive de mensura et gradibus luminis. Augustae Vindelicorum 1760, P. I. Cap. II.

assicurano che l'intensità della luce emessa dall' accennato punto raggiante, segue la ragione dei seni corrispondenti agli angoli d'inclinazione, che formano i raggi emanati da quel punto col piano ivi tangente la superficie luminosa; onde di tutti il più intenso è il raggio perpendicolare, e gli altri di mano in mano più deboli quanto più divergono da quel primo.

Posto questo principio, ogni sistema di raggi cadenti sopra un elemento illuminato, e provenienti da un dato punto luminoso, ha un grado particolare d'intensità originaria, dipendente dall'angolo predetto, che si chiama *angolo di emanazione*. Gli effetti di quest'angolo debbono dunque modificare la legge delle illuminazioni, dedotta dalle precedenti ipotesi, §§. 107, 108, 109.

Elegantissime, ed interessanti in Fisica, sono le conseguenze derivate da questa teoria (1). Ma per quanto richiede lo scopo nostro, citerò solo le seguenti proposizioni.

1.ª Se v'abbia una superficie sferica uniformemente raggiante verso la sua concavità, tutti i punti matematici assegnabili nello spazio contenuto da essa superficie, saranno egualmente illuminati.

2.ª Se v'abbiano due superficie sferiche ineguali, ma similmente raggianti verso la loro concavità, tutti i punti matematici assegnabili nello spazio interno sì dell'una, come dell'altra sfera, saranno ugualmente illuminati; purchè ugualmente intensa parta la luce dall'una, e dall'altra superficie.

3.ª Se in un punto fisico, il quale sia illuminato da una superficie uniformemente raggiante, costituiscasi il centro d'una sfera descritta con raggio arbitrario, dalla cui superficie concava fingasi partire la luce, che veramente proviene dalla supposta superficie raggiante, il grado d'illuminazione proveniente da questa sopra l'elemento, o punto

(1) Vol. I. degli atti della Soc. Ital. Memoria del P. Gregorio Fontana.

fisico accennato, sarà eguale al grado d' illuminazione che deriverebbe dalla parte della superficie sferica, contenuta nella piramide, che ha per base la data superficie raggiante, e per vertice il supposto punto fisico illuminato.

Adunque se il corpo raggiante sia sferico, la piramide dei raggi sarà un cono retto, e la parte della superficie sferica descritta con raggio arbitrario, sarà un segmento di essa.

Sia A il corpo luminoso; C il punto fisico illuminato; SPR la sfera descritta intorno ad esso con raggio arbitrario CP; PVQ il segmento sferico, al quale si riferisce l' illuminazione, che veramente è prodotta dalla sfera luminosa A. Fig. 60

Dimostrasi facilmente coi mezzi somministrati dal calcolo, che se la sfera A, girando intorno al punto C, sempre ad eguale distanza da esso; e per conseguenza producendo nel cono de' raggi una sezione colla superficie sferica SPR, sempre eguale al segmento PVQ, si trasferirà in varie posizioni successive, l' intensità dell'illuminazione prodotta sul detto punto, sarà proporzionale al seno dell'angolo d' inclinazione che formerà la retta CA col piano SR, il quale si finge tangente in C la superficie illuminata, cui spetta il punto C.

Adunque *l' illuminazione prodotta dal sole sopra la superficie d'un corpo, seguirà la proporzione accennata dei seni*, §§. 18, 109; *e per quanto spetta la misura della sua intensità potremo considerarla come proveniente dal centro dell' astro*.

§. 111. Considerando la dipendenza che hanno le gradazioni del lume, sopra una superficie curva, dalla legge con cui procede la sua curvatura ne' varii punti illuminati, sembra che per formarsi una regola facilmente applicabile in pratica, il miglior metodo sia di osservar prima come procedano le dette gradazioni sopra le superficie più semplici, come le sferiche, le cilindriche, e le coniche; delle quali le prime serbano egual curvatura in tutti i punti; le altre

variano con legge più semplice che qualunque altra specie di superficie, fuorchè le sferiche.

Stabilite coll' osservazione, e coll' esercizio, queste norme nell' immaginativa, si paragonerà ad esse superficie, secondo il bisogno, qualunque altra, sopra la quale debbasi esprimere l' effetto del lume, giusta le date condizioni del problema; cioè ragguagliando alle sferiche le superficie curve per ogni verso, ed alle cilindriche, o alle coniche, quelle che son generate da linee rette. Ponghiamo che sia convessa la proposta superficie. Se incominciando dal punto massimamente illuminato, e procedendo verso al contorno dell' ombra, la curvatura vada crescendo, i decrementi dell' illuminazione procederanno più lentamente, che se la superficie fosse sferica. Al contrario più rapidamente procederanno se dal punto che è di tutti il più illuminato vada la curvatura scemando verso al contorno dell' ombra.

Ma quì merita d' essere osservata la diversità dell' illuminazione, che può ricevere in un dato punto una medesima superficie dalla parte concava, e dalla parte convessa; ancorchè sian simili nell' uno, e nell'altro caso le circostanze del lume.

Fig. 61 Per agevolare il concetto, assumiamo in esempio una superficie di rotazione, e pongasi nell' asse il punto raggiante. Sia N il vertice: I il punto raggiante: I N il raggio normale: M sia qualunque altro punto che riceve l' illuminazione obliqua. Dal punto M conducasi la M K perpendicolare sull' asse, e facciasi la K *i* eguale alla K I. Se nel punto *i* s' intenda un centro raggiante al pari di I, la parte concava della data superficie riceverà da esso l' illuminazione, mentre la riceve dal punto I la parte convessa; ed il punto M sarà egualmente lontano dai due punti raggianti collocati nell' asse. Ma è manifesto che l' angolo d' inclinazione V M *i* formato dalla retta *i* M con un piano tangente in M, sarà sempre maggiore dell' angolo d' inclinazione T M I formato dalla I M col piano medesimo.

Adun-

Adunque il punto fisico M riceverà maggior illuminazione dal punto *i*, nella parte concava, che dal punto I nella parte convessa. E se, fatta la N*i'* eguale alla NI, si trasporti in *i'* il punto raggiante *i*, crescerà l' angolo predetto V M*i*, divenendo VM*i'*, e scemerà la lunghezza M*i*, divenendo M*i'*. Frattanto il punto N sarà egualmente illuminato dall' una, e dall' altra parte.

Adunque, posti i due punti egualmente luminosi I, *i'* ad eguali distanze dal punto N, che riceve eguale illuminazione, tanto dalla parte concava, quanto dalla parte convessa, se incominciando dal punto N, decresca l' illuminazione verso M, tanto dalla parte convessa, quanto dalla parte concava, decrescerà meno dalla seconda parte, che dalla prima. Anzi potrebbe accadere che la M*i*, o la M*i'* fosse normale in M, ed ancora più breve della N*i*, o della N*i'*. Allora il punto M considerato nella parte concava, riceverà maggiore illuminazione che il punto N; e perciò dal punto N al punto M, o procederà crescendo continuamente l' intensità del lume, o decrescendo fino ad un punto intermedio, da quello crescerà poi verso M. Frattanto nella parte convessa il punto N sarà sempre più illuminato di tutti gli altri posti intorno ad esso, fino al contorno dell' ombra; e i decrementi procederanno sempre continui da N ad M.

§. 112. Ciò che abbiam detto fino ad ora, spetta all' illuminazione reale; ma la misura di questa, relativamente ad un dato punto fisico, non è la stessa che la misura dell' illuminazione apparente. In fatti ogni punto d'una superficie illuminata è come un centro, dal quale si manda la luce riflessa per ogni verso. La quantità di luce che perviene all' occhio dello spettatore dal detto punto dipende 1° dalla quantità d'illuminazione reale che riceve il punto suddetto; 2° dalla distanza dello spettatore; 3° dal mezzo in cui si propaga la luce riflessa; 4° dall'angolo d'emanazione, secondo gli esposti principj di Bouguer, e di Lambert.

Qual parte spetti a ciascheduna delle annoverate cause nella misura dell' illuminazione apparente, la qual consiste nell' effetto risultante da tutte insieme, potrà essere valutata con precisione matematica, ed espressa, almeno prossimamente, dal calcolo; ciò nulla ostante altre cause intervengono a modificare le apparenze visibili degli oggetti, e cause tali che invano si tenterebbe di assoggettarne gli effetti ad espressioni di formole. Quant' è più liscia, a cagion d'esempio, una superficie illuminata, tanto più s' accosta alla condizione d' uno specchio, e rimanda, or più, or meno distinta un' immagine del corpo luminoso, la quale cangia la sua posizione sopra la detta superficie, ad ogni cangiamento che avvenga nella posizione dello spettatore. Essa immagine piglia varie figure dipendenti dalla configurazione della superficie ond' è riflessa; e nello spazio che occupa sembra concentrata tutta l' illuminazione, mentre ciascun altro punto, che veramente è illuminato quanto lo spazio dell' immagine, apparisce ciò nulla ostante, o del tutto oscuro, o solamente irradiato da lumi riflessi. Non solo la distanza dell' oggetto, ma i colori, e lo splendore degli altri oggetti vicini, sottrar possono al giudizio dello spettatore alcuni accidenti, che sarebbero evidentissimi in altre circostanze; come è noto che in generale la chiarezza, o l' oscurità del campo, in cui si vede un oggetto può sommamente alterare la sua illuminazione apparente; e basti dir che una stella non è visibile in chiaro giorno, mentre così lucida scintilla nell' ombre della notte.

Qual industria di calcolo troverà la misura di quegli effetti che producono i lumi riflessi, i quali operano bensì con leggi analoghe ai lumi diretti; ma tante varietà subiscono, e nella forza, e nel colore, e nella direzione, secondo le condizioni de' corpi riflettenti?

Ciò nulla ostante egli è pur vero che a forza d' esperienza impariamo a valutare gli effetti di coteste cause, mentr' essi e concorrono con tutti gli altri a dimostrarci

le particolarità concernenti la forma, e la posizione degli oggetti presenti alla vista, e sono meravigliosamente immitati coll' artificio della pittura.

Ciò vuol dire che l' ottica, e la prospettiva, coll' ajuto ancora di altre scienze, possono condurci sì veramente alla cognizione di alcune regole, parte esatte, e parte approssimative, intorno alla maniera d' imitare i principali caratteri delle apparenze visibili; ma l' accorgimento necessario per applicar queste regole opportunamente, e per aggiugnere ciò che manca ad esse in ogni caso particolare; quel giudizio pronto, sottile, e sicuro, nel quale si riconosce il possesso dell' arte, sono facoltà che acquistar non possiamo in altro modo, se non che imparando immediatamente dai veri esemplari della natura; osservando con attenzione sollecita, ed assidua gli effetti quotidiani ch' essa ci presenta; paragonando a quelli le imitazioni dell'arte, che sembrano più felicemente eseguite; ingegnandosi di raccogliere dalle dottrine delle scienze esatte le ragioni della rassomiglianza, e della diversità fra le cose rappresentate, e le loro rappresentazioni, o specie visibili, sì naturali, come artificiali. Imperocchè son questi i mezzi di apprendere l' arte, e di perfezionare coll' assiduo esercizio le apprese dottrine.

Le quali riflessioni io terminerò coll'autorità di Leonardo da Vinci, opportunissima, per quanto io credo, a preservare gli studiosi, così dall' arroganza, che inspirar sogliono le teorie mal digerite, e scompagnate dalla pratica, come dalla zotica ostinazione, che nell' esercizio delle arti ricusa la compagnia, e l' ajuto delle scienze.

Quello che si da ad intendere di poter riserbare in se tutti gli effetti della natura, s' inganna, perchè la memoria nostra non è di tanta capacità; però ogni cosa vedrai dal naturale.

Quelli che s' innamorano della pratica, senza la diligenza, ovvero scienza, per dir meglio, sono come i nocchieri, che entrano in mare sopra nave senza timone, o bussola,

e mai non hanno certezza ove si vadano . Sempre la pratica dev'essere edificata sopra la buona teorica, della quale la prospettiva è guida , e porta . (1)

I saggi che mostransi nelle Figure 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, serviranno a schiarimento maggiore di quanto fu detto nei Capitoli VI, VII, VIII.

---

(1) Trattato della Pittura N.i XX, XXIII.

PARTE II

LIBRO II

CAPITOLO I.

Norme generali per la formazione de' cunei, in ogni specie di Volte.

§. 113. Quella Fabbrica di forma curva, che suol essere innalzata sopra muri, o pilastri, o colonne d' un edifizio, per coprirne il vano interiore, chiamasi *Volta*; le cui specie varie son designate con nomi particolari, secondo la natura della superficie interna, che stendesi a guisa di coperchio sopra il vano predetto.

Ma la superficie esteriore non è sempre necessario che sia nella fabbrica rigorosamente definita, e regolare; tale ciò nulla ostante convien supporla, volendo parlare con esattezza delle regole concernenti a cotesta parte dell'architettura. Perciò risguarderemo in generale qualunque specie di volta come un solido contenuto, o fra due superficie semplici, o fra due sistemi composti di superficie discontinue: l' uno interiore, steso sopra il vano dell' edifizio: l'altro terminante al di fuori la solidità della volta.

Raro è che questa possa costruirsi d' un solo masso; e dovendola compor di più parti, o *cunei*, come soglion chiamarsi in termini dell' arte, non ogni distribuzione, ed ogni forma di essi egualmente s' accorda colle regole dell' architettura, le quali in sostanza riferisconsi a due principali articoli; e sono.

I.° Solidità della Fabbrica.

II.° Economia, ed esattezza del lavoro. Veggiam ciò che appartiene distintamente a ciascheduno di essi.

§. 114. 1° Gli angoli dei cunei che hanno i loro vertici, e gli spigoli nella superficie interna, sono più degli altri esposti al pericolo di frangersi, e mentre pongonsi in opera, e dopo che sono collocati al loro sito. In oltre l'integrità di cotesti angoli, e spigoli, contribuisce non meno alla bellezza, che alla solidità dell' edifizio. Perciò si deve cercare che le superficie, le quali dividono un cuneo dall' altro, cadano perpendicolari sulla superficie della volta, o differiscano da questa posizione quanto meno sia possibile; onde gli angoli differiscan fra loro quanto meno si possa.

§. 115. 2.° Le medesime condizioni saranno ancora utilissime pegli angoli diedri, ne' quali convengono fra loro due superficie dividenti.

§. 116. 3.° È da evitare che le divisioni successive di varie coppie di cunei non coincidano in un medesimo piano verticale, o in una superficie, la quale tanto per la sua tenue curvatura, quanto per la sua grande elevazione rispetto all' orizzonte, si accosti ad un piano verticale.

Gioverà esaminare le indicate circostanze in qualche esempio.

Fig. 69 Fingiamo una volta di forma emisferica, la metà della quale sia rappresentata dalla Fig. 69.

Suppongasi eguale in ogni punto la grossezza; e quindi sarà contenuta la solidità della volta fra due superficie emisferiche, concentriche, generate per la rotazione dei semicircoli BAD, EFG, intorno all'asse comune FAC.

Se, per mezzo di piani condotti per l'asse, divideremo la volta in segmenti, o spicchi, la prima condizione sarà soddisfatta, perchè tutti i piani dividenti saranno perpendicolari alla superficie interna.

Immaginiamo i circoli massimi, secondo i quali sarà divisa la detta superficie, e siano 1$a'b'$A, 2$a''b''$A, 3$a'''b'''$A ec... i quali comprendano, a due, a due, ordinatamente, gli angoli eguali BA1, 1A2, 2A3, ec.

Se nuovamente divideremo la superficie interna per mez-

zo di circoli minori, i piani de'quali sian perpendicolari all' asse AC, saran essi tagliati in archi eguali dai circoli massimi precedenti. Laonde, in ciascheduno dei circoli minori, sarà formato un poligono rettilineo, regolare, tirando le corde per le quali si congiungano i punti delle supposte divisioni. Siano indicati due di questi poligoni dalle lettere *a a' a''* ec., *b b' b''* ec. È manifesto, per la costruzione, che saranno paralelli, a due, a due, ordinatamente, i lati opposti al medesimo angolo sferico, formato in A da due circoli massimi, tra i quali sono compresi essi lati. Ora per tutti i lati dei poligoni, e pel centro della volta, siano condotti altrettanti piani, che la dividano. Il sistema dei piani relativi ad un poligono, ed il sistema di quelli che riferisconsi all' altro, comprenderanno una zona, che sarà divisa dai piani dei circoli massimi in altrettante parti eguali, quanti sono i lati di ciascun poligono; ed il complesso di esse parti costituirà ciò che in lingua architettonica si chiama *un filare di cunei*. Possiamo dunque concepire divisa la volta nel modo stesso in altrettanti filari, quante sono le zone intercette dai poligoni paralelli, che a guisa dei precedenti saranno inscritti nella superficie interna; e tutti i piani dividenti saranno ad essa normali.

Ma facilmente si vede che la scambievole inclinazione di due contigui piani dividenti, uno de' quali sia condotto per l'asse, l'altro sia condotto pel centro della volta, e per uno dei lati inscritti, andrà scostandosi vie più dall' angolo retto, di mano in mano che più elevati saranno i filari; e per questo rispetto, le divisioni saranno difettose. In oltre veggiamo che due cunei contigui d' un filare, i due corrispondenti del filare che sovrasta al precedente, ed i due pure corrispondenti nel prossimo filare di sotto, non potranno altrimenti congiungersi che nel piano d' un circolo massimo: il quale essendo verticale non soggiace quasi a nessuna pressione; ond', è che la commettitura continua posta in quel piano, ad ogni scossa accidentale dell' edifizio, sarà

sconnessa più facilmente, che se fosse interrotta questa continuità coll' addentarsi reciproco de' cunei alterni.

§. 117. 4.° Fa d'uopo finalmente osservare che più grande resistenza oppongono le pietre alla forza di pressione, quant' è meno obliqua la direzione di questa forza per rispetto alla vena della pietra; e perciò voglion essere tagliati i cunei con tale accorgimento, che quelle faccie sulle quali si opera la maggiore pressione, secondino, per quanto è possibile, il lato su cui posava il masso nella petraja. Perciò si chiamano *letti* quelle faccie, quando sostengono la pressione dall' alto al basso, o *fianchi* se la sostengono trasversalmente.

§. 118. Conceputa la forma della volta, ed espressa nitidamente per mezzo delle projezioni, si passa a stabilire le divisioni, per le quali è determinata la forma d'ogni cuneo. Ciò posto, immagino un poliedro che lo circoscriva, e ne determino diligentemente la figura.

Volendo adunque ridurre un masso rude alla forma del cuneo, esamino prima coi soliti metodi se nella solidità del masso possa capire la figura del poliedro, e dopo esserne certo, incomincio l' abbozzo, costruendo prima il poliedro medesimo.

A questo fine taglierò prima il masso secondo un piano, in cui debba essere una delle faccie; ed applicata convenientemente sopra di esso la figura di questa, già costruita in cartone, o in tavola sottile, proseguirò a tagliare i piani delle faccie contigue, secondo i lati della precedente, e secondo gli angoli d'inclinazione che quelle formano con questa.

Le circostanze particolari a ciascun caso faranno conoscere quando sia d'uopo condurre cotesto lavoro fino all'ultimo termine, e quando giovi trascurare la riduzione di qualche piano, che non debba sussistere tra le faccie del cuneo.

Compiute le dette preparazioni, procederò a ridurre le faccie curve, colla figura, e col movimento di quelle linee, dal-

dalle quali si possono generare le superficie delle faccie medesime.

Fingo per esempio che si voglia costruire uno de' cunei rappresentati nella Fig. 69.

Le faccie di esso saranno sei: due sferiche, una interna, e concava, indicata dai punti *a b b' a'*: l'altra esterna, e convessa, opposta alla precedente. Piane saranno le quattro rimanenti: due verticali, eguali, e simili; e di queste una è indicata dai punti *abcd*, l'altra è opposta; due inclinate secondo gli strati, o letti dei filari; e sono tra loro simili, ma non eguali. L'una mostra i tre angoli *c*, *a*, *a'*: l'altra i tre corrispondenti *d*, *b*, *b'*. Fig. 69

Se immaginiamo un piano sotteso alla faccia interna, condotto pei quattro punti *a b b' a'*, ed un altro ad esso paralello, che tocchi la faccia esterna, questi due piani, insieme cogli altri quattro già indicati, racchiuderanno il cuneo; ed il poliedro terminato da cotesti sei piani sarà un tronco piramidale. Determino le lunghezze delle corde *aa'*, *bb'*, *ab*, e gli angoli piani, che l'una, e l'altra delle due prime forma coll' ultima. Con tali dati posso costruire in cartone, od altra materia simile, la figura del quadrilatero piano *a b b' a'*, sotteso alla faccia concava. Per ottenere le dimensioni corrispondenti dell' altro simile quadrilatero opposto, che tocca la faccia esterna convessa, basterà osservare che se dal punto del contatto sia condotta una retta al centro C della volta, dovrà passare pel centro d'un circolo circoscritto al quadrilatero interno *a b b' a'*.

Adunque, potendosi determinare quel centro nel detto quadrilatero interno, e misurare la lunghezza della retta che lo unisce col centro C della volta, se chiamerò *p* cotesta lunghezza: R la retta che unisce il punto di contatto col centro C, la quale eguaglia la C *d*: *r* il raggio interno della volta, il quale eguaglia la *c b*, sarà *p* : R : : *r* : C *e*.

Avrò pertanto determinato tutti i lati *ab*, *be*, *ee'*, *e'a* del quadrilatero *a b e e'*, che è una delle due faccie vertica-

li, eguali, e simili, del poliedro, altrimenti dette fianchi. Ma essendo determinati evidentemente ancora gli angoli, sarà compiutamente nota la figura, e si potrà costruire.

Con metodo affatto simile perverremo alla cognizione delle altre faccie; e sebbene non sia necessario costruirne le figure, ciò nulla ostante queste possono spesso venire in acconcio per riscontrare, a passo, a passo, l' esattezza del lavoro, che procederà come segue.

§. 119. Trovate le grandezze degli angoli, che forma il piano *acd* col piano *caa'*, e coll'altro *dbb'*, taglio il masso secondo il piano in cui dev' essere un fianco del poliedro, cioè la faccia rappresentata in *abee'*. Vi adatto poscia la figura della detta faccia, e noto diligentemente sul piano della pietra i quattro punti *a*, *b*, *e*, *e'*, ed ancora i lati che li congiungono. Secondo il lato *eb*, e l' angolo che il piano *abe* formar deve col piano *ebb'*, taglierò nuovamente la pietra, guidando il taglio colla squadra mobile, la quale comprenda l' angolo predetto, ed appoggiandosi con un lato alla faccia *abe*, determini coll' altro il piano *ebb'*.

Scoperto questo piano, ed in modo simile ancora l'altro *e'aa'*, sull'uno di essi, p. es., su quello indicato dalle lettere *ebb'*, e sul noto lato *be*, adatterò la forma della faccia *ebb'h*. Similmente adatterò nell' altro piano *a' a e'* la forma della faccia che gli corrisponde; e con tal metodo saranno determinati sulla pietra, e scoperti, i quattro punti *a*, *b*, *b'*, *a'*, pei quali deve passare la faccia interna del poliedro; i quattro, pei quali passa il secondo fianco; ed i quattro, pei quali passa la faccia esterna.

Se dunque sia costituito un regolo immobile, che passi con un suo spigolo esattamente pei due punti *b*, *b'*, ed un altro regolo, che similmente passi pei due *a*, *a'*, nel piano di questi due spigoli dovrà essere la faccia interna *aa'b'b*; e quindi un terzo regolo appoggiato ai primi due, dirigerà acconciamente il taglio della faccia predetta, ed in modo simile eseguir potremo i tagli rimanenti.

Si vede chiaramente che non è necessaria la forma della faccia *e'aa'*, quando si abbia l' altra *ebb'*; atteso che essendo noto l' angolo che il fianco *e'ab* forma colla faccia *ebb'*, il quale è pur l' angolo formato dalla faccia medesima coll' altro fianco *a'b'h*, si potrà scoprire il piano *a'b'h*, dirigendo il taglio colla squadra mobile che comprenda quell' angolo, si appoggi con un lato al piano *ebb'*, e determini coll' altro il piano *a'b'h*. Imperocchè mentre il primo lato scorrerà sul piano *ebb'*, il secondo farà l' uffizio di quella retta, pel cui movimento si può generare il piano *a'b'h*.

Su questo piano, e sul lato *hb'* adattata dunque la forma del fianco, otterremo come prima i quattro punti determinanti ciascheduna delle altre faccie, delle quali, o colla rispettiva figura già costrutta per maggiore cautela, o con altre diligenze equivalenti, gioverà riscontrare l' esattezza, innanzi di procedere al compimento del cuneo.

In esso non dovendo sussistere nè la faccia *abb'a'*, nè la sua opposta, potrà da quelle parti rimaner rozzo il masso, nè sarà necessario costruire in cartone la detta faccia piana *abb'a'*, quando non si creda di render più facile la riduzione della faccia concava sottesa.

§. 120. Venendo ora all' ultima parte del lavoro che risguarda le due faccie curve, osserviamo che se intorno alla retta *edb*C, come asse, intendasi rotare col suo piano l' arco B*ab*A, questo percorrerà tutta la superficie concava del cuneo. Per conseguenza preparerò una forma di tavola sottile, ma consistente abbastanza per conservarsi piana, e centinatala in convesso, di maniera che il suo margine si adatti giusto all' arco B*ab*A, segnerò nel suo piano la retta *e*C, ed il punto *b*. Pei punti *e*, *b* farò passare lo spigolo d' un regolo fermo immobilmente, sicchè faccia l' uffizio dell' asse ideato, intorno al quale dovrà rotare la forma, appoggiandovisi con tutta la linea retta descritta nel piano di essa, e col punto ivi segnato che sempre cada sul punto *b*. L' orlo della forma condurrà lo scalpello continuamente nel-

la superficie sferica interna del cuneo. Il medesimo espediente servirà pure per la faccia convessa, quando la forma sia foggiata in concavo secondo l' arco E*cd*F.

Per maggior sicurezza nell' operazione, gioverà descrivere sui fianchi, e sui letti del cuneo, gli archi sottesi ai lati del quadrilatero *abb'a'*, perchè quegli archi, dovendo essere i lati del corrispondente quadrilatero sferico, presteranno essi pure molto ajuto a dirigere esattamente il moto della forma.

CAPITOLO II.

Costruzione d' una Piattabanda.

§. 121. La superficie interna di questa specie di volta è un piano continuato, e per lo più orizzontale, in cui vengono a collocarsi tutte le faccie inferiori dei cunei, che
Fig. 70 la compongono. Data la grossezza CG, la profondità PR della volta, e l' ampiezza AC dell' apertura, sopra di questa, come base, intendo descritto un triangolo equilatero ACE, col vertice all' in giù. Fatto centro in E, descrivo l' arco sottendente la corda AC, e lo divido in tante parti eguali A1, 12, 23 ec., di numero dispari, quanti sono i cunei, coi quali intendo di costruire la volta. Conduco poscia le rette EC, E4, E3, ec.; e facendo passare per ciascheduna di esse un piano perpendicolare a quello della fronte ABEC, col sistema di questi piani determino le divisioni longitudinali dei cunei.

Ma perchè meglio sostengansi vicendevolmente, è usanza formarli a guisa di gomito, sicchè ciascuno degli intermedii ai due estremi, posando sul contiguo, e quasi abbracciandolo, sia da esso verticalmente sostenuto. Per determinare il detto gomito di ciascun cuneo, produco la AC in L, ed L', talchè ciascuno dei prolungamenti CL, AL', fra loro eguali, sia maggiore della FI, ma non ecceda notabil-

mente la quarta parte della AC. Descrivo poscia un arco di circolo che passi per L, L', e tocchi la GH orizzontale, cioè paralella alla AC.

Notati i punti, ove le concorrenti EC, E4, E3, ec. tagliano l'arco descritto sulla corda LL', per ciascuno di quei punti conduco una retta orizzontale, ed una verticale. L'orizzontale condotta pel punto *n'* terminerà nel suo incontro *d'* colla E3; quella condotta per *n* terminerà nel suo punto d'incontro colla E4; e diviso per mezzo l'arco intercetto fra 'l punto *n* ed il punto L, si condurrà pel punto di divisione un'orizzontale, che termini al suo incontro *r* colla EC. Di nuovo la verticale condotta per *n'* terminerà nel suo incontro *r'* colla orizzontale condotta per *n*. La verticale condotta per *n* terminerà in *p*, dove incontra l'orizzontale *pr*, ec. Saranno così determinate le faccie anteriori, o fronti dei cunei C*rpnd*D, D*dr'n'd'*D', ec. (*) Se la profondità PR non si debba dividere in più ordini trasversali di cunei, ciascuno avrà manifestamente la forma d'un prisma retto, la cui base sia la fronte sopra definita, e l'altezza, o lunghezza, eguagli la PR. Se poi sarà mestieri costruire più ordini successivi, la congiunzione d'un ordine col suo contiguo potrebbe farsi secondo un piano alquanto inclinato all'orizzonte, per evitare il difetto già avvertito, §. 116. Ma si potrà ancora legare insieme tutti i cunei, formando gli ordini come suol dirsi *a morse*, o *a pettine*, in guisa che in ciascun ordine i cunei siano altri più lunghi, altri più brevi; e questi giacciano

(*) Diversamente vorrebb' essere proporzionata la lunghezza di que' risalti *d n'*, *r n*, *p* C, se si trattasse di equilibrare la spinta reciproca de' cunei, per modo che sostengansi insieme senza fare veruno sforzo contra i piè dritti. Ma quì supponghiamo capaci della resistenza sufficiente i piè dritti, senza bisogno di allungar tanto i risalti de' cunei, e vuolsi trarre qualche vantaggio da essi risalti, conciliando insieme il grato aspetto dell' opera.

fra due dei primi, che sporgeranno oltre al piano in cui terminan i più brevi. Negli intervalli riceveranno i cunei sporgenti dell'ordine consecutivo, e ne' vani di esso andranno gli sporgenti del primo, formando un composto più solido con tale alternazione, come si vede indicato nella Figura.

La volta di cui si tratta somministra un esempio, nel quale tutti i piani dividenti non possono essere perpendicolari alla superficie interna, e nemmeno ad essa egualmente inclinati.

§. 122. Potrebbe in alcuni casi essere impraticabile l'espediente dei risalti; ed allora, volendo aggiugnere qualche sussidio all'effetto della scambievole pressione, gioverà un espediente particolare, se lo comporti la qualità della
Fig. 70 I. pietra con cui si fabbrica. Rappresentiamo in *mnsru* un cuneo senza risalto, e nel suo fianco *nru* s'intenda fatto un intaglio cuneiforme 1234561, ed un altro simile intaglio pure nel fianco corrispondente del cuneo contiguo; il quale essendo congiunto al precedente, dei due intagli eguali e simili, si formi una sola cavità continua. Questa potrà essere occupata da un cuneo di metallo foggiato, secondo il linguaggio della pratica, *a coda di rondine*.

Facilmente si vede che quel cuneo potrà essere tolto, e rimesso nella sua cavità, qualunque volta occorra per cagione di risarcimenti necessarj alla volta; ma dovrà impedire il movimento di traslazione al cuneo *mnrsu*, sul fianco del cuneo contiguo, e molto più il movimento di rotazione intorno allo spigolo *ny*, se per qualche accidente i piè dritti cedendo alcun poco, permettano alla volta di curvarsi, sconnettendosi i cunei.

Fig. 70 II. Ma più efficace ancora mi sembra il seguente artificio. Scolpiscasi in direzione perpendicolare al lato *ny*, e paralella al piano del fianco, un canaletto emicilindrico 1 2, nel fianco stesso, ed un'altra cavità 2 3 pure di forma emicilindrica retta, di alquanto maggior diametro che la prima, ed

avente comune l'asse colla medesima. Nel fianco del cuneo contiguo scolpiscasi una sola metà del cavo fatto nel precedente, ed un canaletto eguale, e simile all'altro corrispondente 1 2, in modo, che essendo uniti i due cunei, il vano inferiore incavato nell'uno, e nell'altro formi una figura continuata, eguale a tre quarti d'un cilindro, la cui metà si rappresenta nella Fig. 70. II, ed i due canaletti formino una sola cavità cilindrica continua comunicante colla predetta. Ora v' abbia un semicilindro K di metallo, capace di riempiere la cavità 2 3: non però sì esattamente, che non possavi rotare per entro intorno al proprio asse. Al detto emicilindro sia attaccato un manico pure di forma emicilindrica, eguale alla cavità 1 2, solcato in cima, affinchè nel solco introducendo una bietta di ferro, od uno scalpello, si possa far girare il manico, e con esso l'emicilindro annicchiato nella cavità 2 3. È manifesto che se cotesta operazione sarà eseguita allorchè il fianco *nru* è adagiato sul corrispondente fianco del cuneo contiguo, una metà dell'emicilindro, entrerà nella cavità di esso cuneo contiguo, e l'altra metà rimarrà nel vano 2 3. In tal positura impedirà che i due cunei si disgiungano. Con simile artificio si potrà far rientrare l'emicilindro nella sua cavità, e ciascheduno dei due cunei rimarrà libero, quando occorresse levarlo dal proprio sito, per qualche ristaurazione.

Per diminuire la disuguaglianza negli angoli de' cunei, si piglia il centro E alquanto più basso che il vertice del triangolo equilatero A C E. Perchè poi difficilissima cosa è che non iscorrano alcun poco al basso i cunei, e si gonfi la superficie interna, che dovrebbe esser piana, suol darsi una piccola centinatura in contrario alle faccie inferiori, come accennasi dalla linea punteggiata ARC.

CAPITOLO III.

Della volta Cilindrica, detta altrimenti a Botte.

§. 123. La volta denotata con questo nome ha la forma d'un semicilindro cavo, di base per lo più circolare, e normale al suo asse. Adunque la superficie interna, come pure l'esterna, potrà generarsi col movimento di una retta, che rimanga sempre paralella all' asse, e sempre distante da esso quant'è il semidiametro dell' ampiezza interna, od esterna, secondo che interna, od esterna, sarà la superficie che si vuol generare.

Ma la medesima superficie si potrà pur generare col movimento d'un circolo, il cui centro percorra l'asse, ed il piano resti sempre ad esso normale. Tanto questo piano, quanto quello che è determinato dall'asse, e dalla sopr' indicata retta generatrice, sono perpendicolari alla superficie della volta, e sono pure scambievolmente normali fra loro. Adunque ambedue sono opportuni per dividere la volta in cunei.

Fig. 71 Si rappresenti dal rettangolo ABCD la projezione della superficie interna. EFBA, GCDH siano le sezioni orizzontali dei piè diritti, sopra i quali posa la volta. L'anello circolare *amdfnb* rappresenti la projezione verticale.

Divisa l'una, o l'altra semicirconferenza, in un numero dispari d'archi eguali, e tirati i raggi che passano per le divisioni, sarà l'anello circolare diviso per essi in parti eguali, e simili, come le *abb'a'*, *a'b'b''a''* ec., le quali sono altrettante faccie apparenti di cunei.

Se per ciascuna divisione sia condotto un piano, che passi pure per l'asse della volta, questa sarà divisa longitudinalmente in parti eguali; ed ognuna sarà un cuneo, se la profondità, o lunghezza AB, non ecceda la corrispondente dimensione delle pietre, che si pongono in opera. Altrimenti divideremo la lunghezza AB in parti come

AR,

AR, LF, ec., e tirate le LK, FG, intercette fra le EF, HG, esse rappresenteranno le projezioni orizzontali di altrettante sezioni eguali, e simili a quella che si rappresenta verticalmente in *amdfnb*. Ciascun segmento della volta, che è intercetto fra due prossime sezioni anulari, come le mentovate, conterrà un ordine di cunei, tanti di numero, quante sono le parti $b\,a'$, $b'a''$ ec., nelle quali è divisa la fronte $a\,n\,d$. Ogni cuneo sarà compreso da sei faccie: quattro piane, e due curve cilindriche.

Ma la congiunzione dei cunei d'un ordine, come AK, con quelli dell'ordine contiguo, come KF, formerebbe un piano continuato, e verticale, secondo la retta L K, se i cunei fossero tutti d'una medesima lunghezza. A questo difetto si potrà in parte riparare, interrompendo la continuità di quel piano coll'alternativa de' cunei di varia lunghezza, come fu detto per la piattabanda. Gioverà pure aggiugnere le incastrature, le quali consistono in un intaglio scavato lungo il margine d'un cuneo, che dev' essere esattamente riempiuto da un labbro sporgente del cuneo successivo.

§. 124. Per vedere distintamente tutte le parti del lavoro, con cui si riduce un masso alla debita forma d'un cuneo, prendiamo ad esaminare per esempio la costruzione di quello che è rappresentato orizzontalmente in 2345, e verticalmente in $a'b'b''a''$. Per la corda dell'arco $a'a''$ intendiamo condotto un piano paralello all'asse della volta. Paralello a questo s'immagini un altro piano tangente la superficie esterna. Questi due piani: i due che passano per l'asse, e pei punti $a'a''$: i due paralelli fra loro, projettati orizzontalmente in 23, 45, racchiudono evidentemente un prisma, il quale contiene il cuneo di cui si tratta.

Determino la lunghezza dei lati, gli angoli da essi compresi, e le inclinazioni scambievoli dei piani mentovati; e poscia costruisco la figura I, nella quale il lato $\alpha\alpha'$ eguaglia la corda $a\,a'$; ciascheduno degli angoli $\gamma\,\alpha\,\alpha'$, $\gamma'\alpha'\alpha$ eguaglia l'uno, o l'altro dei due angoli eguali $b'a'a''$, $b''\,a''\,a'$, ed il

lato $\alpha\gamma$, eguale all'opposto $\alpha'\gamma'$, eguaglia la $a'b'$ insieme col suo prolungamento fino alla tangente dell' arco $b'b''$, paralella alla corda $a'a''$. Descritto dunque l' arco $\alpha\alpha'$ con raggio eguale a quello della superficie interna, e l' arco simile paralello $\beta\beta'$ con raggio eguale a quello dell'esterna, sarà compiuta la forma $\alpha\gamma\gamma'\alpha'$ eguale e simile a ciascheduna delle due faccie verticali del poliedro, che contiene il cuneo da costruire.

La figura II sarà un rettangolo $a2'4'a'$, del quale il lato aa' eguaglierà la lunghezza 2 4, ed il lato $a2'$ eguaglierà la retta $a'b'$, cioè la grossezza della volta. Tale sarà la forma che deve avere l' uno, e l' altro fianco del cuneo, ovvero ciascuna di quelle faccie, i cui piani prolungati passano per l' asse. Volendo fare le incastrature lungo i margini projettati orizzontalmente in 2 3, 4 5, talmente disposte, che il cuneo 2 5 abbia un orlo, o labbro prominente, il quale si adatti nell' intaglio fatto nel cuneo A' 3, e dalla parte opposta riceva in un simile intaglio l' orlo del cuneo 4M, accrescerò nella Fig. II il rettangolo $a'2'$ del rettangoletto $\mu 2'$, la cui dimensione $a''\mu$ eguagli lo sporto dell' orlo, che in profilo rappresentasi dalla parte $2'2hg$, con questa regola, che lo sporto non ecceda la metà della grossezza assegnata al labbro, e questa non differisca considerabilmente dal terzo di tutta la grossezza $a2'$.

Ma nell' area del rettangolo $a'2'$, e nell' angolo $4'$, disegnerò il piccolo rettangolo $4't$ eguale, e simile all'altro $2'h$; e sarà quello il profilo dell' intaglio. La forma che deve avere il fianco del cuneo sarà dunque espressa dal contorno $agh2str a'$.

§. 125. Riconosciuta la capacità del masso, incomincio il taglio dal piano che deve contenere la faccia I. Adatto questa sul detto piano, e taglio in seguito il masso secondo i due altri piani dei fianchi, i quali passano pei lati $\alpha\gamma$, $\alpha'\gamma'$, e sono normali al piano della prima sezione. Sopra ciascheduno dei piani testè scoperti adatto la forma II, in modo che il lato 2μ cada esattamente sul lato $\alpha\gamma$, col punto 2 sul pun-

to β, quando trattasi del fianco relativo al lato $\alpha\gamma$; e similmente opero per determinar l'altro fianco. Con questo metodo determino sopra i piani dei due fianchi i vertici degli angoli della faccia opposta alla I; ed è chiaro che tagliando il masso secondo un piano che passi per quei vertici, in quel piano dovrà essere la faccia predetta.

Prima di scolpire il labbro, e l'intaglio, tornerà in acconcio ridurre, o ambedue le faccie curve, o almeno l'interna. Questa parte di lavoro riescirà facilissima, guidando lo scalpello secondo lo spigolo d'una squadra rettangola, che sia sempre paralello ai lati del cuneo, i quali sono normali alla faccia $\alpha\alpha'\beta\beta'$, mentre l'altro spigolo si adatti al piano della medesima faccia, ed il vertice dell'angolo retto compreso dai due spigoli della squadra, percorra l'arco $\alpha\alpha'$. Più sicura procederà l'operazione se avremo descritta anche la faccia opposta alla I, e lo spigolo che deve regolare lo scalpello posi sull'arco $\alpha\alpha'$, e sull'opposto, percorrendo porzioni eguali di essi archi. Sulla riduzione della superficie esterna non è necessario parlare appositamente, essendo chiara per se l'applicazione del metodo medesimo, colla differenza sola, che il vertice dell'angolo compreso dai due spigoli della squadra scorrerà sull'arco convesso $\beta\beta'$.

Neppure fa di bisogno spiegare minutamente come scolpiscasi, ed il labbro, e l'intaglio, mostrando bastantemente chiaro la figura, che posta $\beta\beta''$ eguale alla $2h$, e descritto sulla faccia I l'arco $\beta''\beta'''$ concentrico agli altri due, si dovrà togliere dal cuneo un solido, che abbia la base $\alpha\beta''\beta'''\alpha'$, e la profondità eguale alla hg, perchè rimanga prominente dal cuneo l'orlo, o labbro rappresentato in $\beta\beta'\beta''\beta'''$. Similmente per avere l'intaglio si leverà dalla parte opposta un solido che abbia per base una figura eguale, simile, ed opposta alla $\beta\beta'\beta''\beta'''$, e la profondità eguale alla hg, ovvero alla 54'.

§. 126. Non di rado le circostanze della fabbrica esigono che la base *amd'* della superficie interna, in vece d'essere un

semicircolo, sia una semiellisse. Allora per ottenere che i piani delle divisioni longitudinali siano perpendicolari alla superficie della volta, converrà che le rette $b' a'$, $b'' a''$ ec., in vece di concorrere al centro dell' ellisse, siano tangenti la sua evoluta, §. 144, P I. Se vogliansi eguali in lunghezza gli archi $a a'$, $a' a''$ ec., non saranno eguali le corde; e volendo eguali le corde, corrisponderanno ad esse archi diseguali. Laonde in qualunque modo si faccia la divisione, le fronti de' cunei saranno fra loro dissomiglianti, e la forma costrutta per ridurre uno di essi non potrà valere alla riduzione del suo contiguo. A produrre questa differenza d'un cuneo dall' altro, contribuisce un' altra circostanza. Volendo che l' archivolto esteriore mostri grossezza uniforme, il suo contorno esterno, non potrà essere una semiellisse, ma sarà una delle evolventi relative alla semiellisse $a m d$, e si descriverà come fu mostrato nel citato §. 144, P.I. Se vogliasi che il contorno esteriore sia una semiellisse concentrica, e simile all' interna amd, allora la grossezza dell' archivolto, e di tutta la volta, procederà crescendo dalla sommità n, verso ai piè dritti, quando gli assi maggiori delle due ellissi siano nell' orizzontale $b f$; ed al contrario procederà scemando, se in quella orizzontale, siano gli assi minori; perciocchè la differenza dei due semiassi maggiori sarà sempre più grande che la differenza dei due minori. Nella prima condizione, che è quella della volta detta *a sesto scemo*, o *ribassato*, non disdice che l'orlo esterno sia ellittico, e simile all' interno; poichè questa combinazione s' accorda colle regole statiche. Nella seconda condizione, che è quella della volta detta *a sesto rialzato*, la combinazione delle due ellissi simili è deforme all' occhio, e contraria alle dette regole. Ma stabilite le figure che aver debbon le faccie d' un cuneo, si potrà sempre costruirlo in modo simile a quello che abbiamo indicato per la costruzione d' un cuneo spettante alla volta, la cui superficie sia cilindrica, retta, ed a base circolare, §. 125. Le riflessioni poi che ora abbiamo

fatte sopra le volte cilindriche di base ellittica, ci scoprono i grandi vantaggi che derivano dal sostituire all' ellisse una composizione d' archi circolari, come suol farsi in pratica; ai quali vantaggi s' aggiugne ancora l' altro, che l' unione dell' arco, e del piè dritto, riesce più dolce, e grata alla vista in quest' ultima maniera, che formando la volta sul sesto ellittico.

§. 127. Le due specie delle quali abbiamo parlato, cioè la piattabanda, e la volta a botte, o cilindrica, possono essere oblique; cioè a dire la retta che misura la loro lunghezza, o profondità, e può generare col suo movimento la superficie interna, od esterna, può non essere normale alle fronti della volta. In questo caso è manifesto che se la profondità sia tale da potersi occupare con un sol ordine di cunei, i fianchi di essi dovranno inevitabilmente essere obliqui alle fronti. Ma quando la lunghezza della volta ammetta più ordini di cunei, si potrà, volendo, limitare il difetto alle sole faccie esteriori, cioè quelle che sono nei piani terminanti la lunghezza della volta. Le altre faccie analoghe possono essere normali ai fianchi, disponendo le sezioni, e gli ordini come apparisce nella Fig. 72, ove le sole fronti PQ, RS rimangono oblique, e le altre sezioni sono perpendicolari alla direzione PR, ed in conseguenza ai fianchi. Fig. 72

Nella volta cilindrica obliqua, ancorchè abbia la base circolare, si deve avvertire che le faccie interne de' cunei opposte alle apparenti riesciranno comprese non già da due archi circolari, ma da due ellittici concentrici, perchè ellissi, e non circoli saranno le sezioni fatte nelle due superficie, interna, ed esterna, da un piano perpendicolare all' asse.

CAPITOLO IV.

Costruzione della volta Cilindrica a Crociera.

Fig. 73 §. 128. Sia *mnpo* un quadrato. Sulle pareti 5 6, 7 8 posi una volta cilindrica retta. Con due piani verticali condotti per le diagonali *no*, *mp* si tagli la volta, e tolgansi via le parti projettate ne' due triangoli *mtn*, *otp*. Rimarranno due tronchi acuminati, che si rappresentano in 5*mto*8, 6*ntp*7. Immaginiamo ora un' altra volta, eguale e simile alla prima, e posata sulle pareti 1 2, 3 4, la quale segata similmente dai due piani predetti, rimanga coi tronchi acuminati 1*mtn*4, 2*otp*3. I tronchi delle due volte si congiungeranno secondo le sezioni ellittiche projettate nelle diagonali *mp*, *on*, e formeranno angoli salienti negli spigoli interni, ed angoli entranti nelle congiunzioni delle superficie esterne. Il sistema delle quattro porzioni cilindriche projettate in *mtn*, *pto*, *otm*, *ntp* forma la crociera.

Dividiamo similmente ciascheduna delle due volte predette con piani condotti pegli assi rispettivi. Le divisioni della superficie interna, projettate orizzontalmente, si potranno rappresentare nelle rette *sr*, *s'r'*, *ux*, *u'x'* ec. Dividendo nuovamente con piani perpendicolari agli assi rispettivi i tronchi della volta, che sono intorno al quadrato della crociera, si avranno quelle medesime specie, e composizioni di cunei, che furono descritte parlando della volta semplice a botte. Ma pegli angoli della crociera converrà costruire i cunei di forma forcuta, a fine di evitare i due massimi difetti già notati, cioè 1.° la congiunzione continua ne' piani verticali projettati in *mp*, *no*, tra i cunei spettanti ad un tronco, e quelli d'un altro, 2.° l'acutezza degli angoli, che le faccie concave de' cunei stessi dovrebbero formare colle rispettive faccie piane, le quali verrebbero a congiungersi nei detti piani diagonali.

Ciò posto rappresento particolarmente uno di tali cunei nella Fig. 73 I. Fig. 73

Il mistilineo ABCDEF rappresenterà verticalmente un braccio del supposto cuneo angolare, e la corrispondente projezione orizzontale sarà nello spazio *adhgh'd'a*. Il quadrilatero ABCD, ed il corrispondente *abcd* rappresentano la faccia piana superiore, il cui piano prolungato passa per l'asse della volta, alla quale appartiene il braccio del cuneo che si considera, avendo ciascheduno di tali cunei un braccio che spetta ad una, ed un braccio che spetta all'altra delle due volte sopraddette. FGHE — *fghe* rappresenteranno la faccia piana inferiore, o il letto, che deve passare per l'asse medesimo col suo piano prolungato. AFED—*afed* rappresentano la faccia concava interna: BGHC—*bghc* la convessa esterna. Finalmente DE — *de* rappresentano l' arco circolare, ove termina la faccia concava interna; CH — *ch* quello, ove termina la convessa esterna.

Le faccie del secondo braccio saranno similmente rappresentate coll' ordine seguente. La superiore piana in AB—*abc'd'*; la piana inferiore in FG—*fe'h'g*; la concava interna in AF—*afe'd'*; la convessa esterna in BG—*bgh'c'*; finalmente la faccia piana verticale in ABGF—*d'c'h'e'*. Ognuno di tali cunei è dunque compreso fra dieci faccie: due cilindriche concave, che forman angolo saliente nello spigolo AB: due cilindriche convesse che forman angolo entrante in BG: due piane superiori dirette agli assi rispettivi delle due volte, e congiunte ad angolo saliente nello spigolo AB: due piane inferiori dirette parimenti agli assi rispettivi, e congiunte ad angolo entrante in FG; finalmente due piane verticali che forman le fronti del cuneo, eguali e simili ambedue alla figura ABGF.

§. 129. Le dimensioni AD, CE bastano per l' esame del masso. In fatti se questo è capace della dimensione AD in senso orizzontale, tanto per la lunghezza, quanto per la larghezza, ed in oltre della dimensione verticale CE per

l' altezza, non v' ha dubbio che potrà contenere il cuneo dimandato.

Per quanto spetta alla costruzione, ed all' uso delle forme, si vede facilmente che la sola necessaria sarà la ABGF. Spianato il masso da quella parte, ove si vedrà conveniente che siano i due lati *a d*, *a d'* della projezione orizzontale, segnerò in quel piano i detti lati, ed ancora le direzioni *dh*, *d'h'*, notando il punto *i*, nel quale s'incontrano, e farò tagliare il masso secondo due piani perpendicolari a quello che è già scoperto, e determinato dalle *ad*, *ad'*; i quali in oltre passino pei lati *d h*, *d' h'*. Sul primo di questi piani adatterò la forma ABGF; ed i punti *d*, *c*, *h*, *e* siano sul piano *dad'* le projezioni dei punti ordinatamente corrispondenti A, B, G, F della forma, o del suo vestigio descritto sul piano *i d*.

La medesima forma dev' essere adattata similmente sul piano rappresentato in *d'i*. A questo fine misuro le normali che uniscono i punti A, B, G, F della forma adattata al piano *d i*, o del suo vestigio in esso descritto, colle rispettive projezioni *d*, *c*, *h*, *e*, e sulla retta *h' d'*, incominciando dal punto *h'*, noto le misure *h' c'*, *h' e'* ordinatamente eguali alle *hc*, *he*. Innalzo nel piano che insiste sopra la *d' h'*, e dai punti *h'*, *c'*, *d'*, *e'* altrettante normali ordinatamente eguali alle corrispondenti già misurate, che insistono sui punti *h*, *c*, *d*, *e*. È manifesto che se la forma ABGF si adatti sul piano *d' h'* in modo che il punto A cada sull' estremo superiore della normale in *d'*, ed il punto B sull' estremo superiore della normale in *c'*, il punto G andrà sull'estremo superiore della normale in *h'*, ed il punto F sull' estremo superiore della normale in *e'*. In tal guisa la posizione della forma ABG sul piano *h' d'* sarà simile a quella che ebbe nel piano *hd*.

§. 130. Preparate queste cose, taglierò il masso secondo un piano, che passi pel lato AB della forma, o del suo vestigio segnato sul piano *h d*, e sia perpendicolare al me-

de-

desimo piano *h d* ; indi ripeterò il taglio secondo un piano che passi pel lato AB della forma segnata sul piano *h' d'*, e sia perpendicolare al piano medesimo *h' d'*. Con questi due tagli scoprirò le due faccie piane superiori, projettate orizzontalmente ne' due quadrilateri *abcd* , *a b c' d'*, e lo spigolo in cui si uniscono , che è projettato in *a b*—A B .

Del tutto simile è la maniera per iscoprire le due faccie piane inferiori , che sono projettate orizzontalmente ne' due quadrilateri *fehg* , *f e' h' g* ; se non che è d' uopo avvertire che il taglio non oltrepassi quel piano verticale, che sarebbe projettato nella retta *a g* . Sul primo dei quattro piani testè scoperti converrà descrivere i due lati corrispondenti alle projezioni *a d* , *b c* ; e sul secondo quelli che corrispondono alle projezioni *a d'*, *b c'*.

§. 131 . Passiamo alle faccie curve ; e prima alle due concave . Quella che spetta al braccio *a d* è una porzione di superficie cilindrica , la quale ha per base l' arco projettato in DE—*de*, già segnato sul piano *hd*, ed è generata da una retta normale al piano medesimo *i d* , la quale percorre l' arco predetto . Si potrà dunque scolpire il masso col metodo medesimo , che fu insegnato nel §. 124 , trattando della volta semplice a botte . Lo stesso faremo per l' altra faccia del braccio *a d'* ; e lo spigolo corrispondente alle projezioni AF—*a f* , in cui si uniscono esse faccie ad angolo saliente , riescirà determinato dall' intersecazione delle due superficie , o potrà per maggior esattezza essere descritto in una di esse, prima di scoprir l' altra col secondo taglio .

È superfluo descrivere minutamente come debbansi scoprire le superficie convesse esterne ; conciossiachè si vede che l' operazione è analoga alla precedente , dovendosi nell' uno , o nell' altro caso, dirigere il taglio secondo una retta normale al piano *i d* , pel primo braccio , ed al piano *i d'* pel secondo ; ma se per le faccie concave quella retta segue gli archi interni , per le convesse segue gli esteriori . L' avvertenza particolare che dobbiamo avere nello scoprire

le faccie convesse, è di non oltrepassare col taglio l' arco ellittico projettato in BG—*bg*, perchè ivi le due faccie si congiungono ad angolo entrante.

CAPITOLO V.

Costruzione della volta a spicchi, altrimenti detta a padiglione.

Fig. 74 §. 132. Il contorno della base di questa volta è un poligono regolare. Noi prenderemo ad esempio un ottogono ABCD ec.

Sui lati opposti BC, GF immaginiamo costituita una volta cilindrica retta, che sia tagliata da due piani verticali, condotti pei due diametri del poligono BF, CG. Le porzioni della supposta volta intercette fra i due piani secanti, saranno projettate ne' due triangoli, BOC, FOG; e ciascheduna di esse è l' ottava parte della volta di cui si tratta. Supponendo per tanto che sopra ciascun lato della parete insista una porzione eguale, e simile alle già descritte, il complesso di tutte costituirà la volta a spicchi, ed ognuna delle otto parti si chiamerà uno spicchio. È manifesto che le linee, secondo le quali si congiungono le superficie interne, ed esterne, sono ellissi projettate orizzontalmente nei diametri BF, GC, ec. del poligono; gli angoli interni sono entranti, e salienti gli esterni.

Suppongo similmente divisi gli spicchi per mezzo di piani condotti pegli assi de'rispettivi cilindri. Le sezioni prodotte in questo modo nelle due superficie, esterna, ed interna, saranno ottogone, rettilinee, regolari, tutte simili, poste coi loro lati ordinatamente paralelli, ed orizzontali. Possiamo rappresentare nelle rette *ir*, *rf*, *i'r'*, *r'f'* due coppie di lati, l'una spettante ad un ottogono superiore, l'altra ad un inferiore. Sian divisi nuovamente gli spicchi con piani perpendicolari agli assi de' rispettivi cilindri. Le sezioni fatte nelle due superficie, interna, ed esterna, saranno cir-

colari, ed i raggi loro eguaglieranno le normali condotte dal centro O rispettivamente sopra i contorni, interno, od esterno, della base.

I piani concorrenti negli assi rispettivi, e quelli che sono perpendicolari agli assi medesimi, dividono convenientemente la volta in cunei, altri de' quali hanno la medesima forma che si richiede per la costruzione della volta semplice a botte; altri poi, cioè quelli che sono negli angoli, debbon essere di forma forcuta, come i già descritti per la volta a crociera; ed in ciò solo differenti, che avendo quelli congiunte ad angolo saliente le superficie interne; ed i letti, ovvero le faccie piane inferiori, congiunte ad angolo entrante, questi hanno i letti ad angolo saliente, e le faccie interne congiunte ad angolo entrante.

§. 133. Rappresentiamo nella Fig. 75 N.° I uno dei detti cunei angolari in prospettiva, e N.° II. sia la sua projezione orizzontale. I due quadrilateri ABED, BCFE rappresentano le due faccie esterne, e BE lo spigolo in cui si congiungono. LMIG, HIMN corrispondono alle faccie interne, ed IM rappresenta la loro congiunzione. Fig. 75

I due quadrilateri BCNM, BALM sono le projezioni dei due letti, o faccie piane inferiori; EFHI, EDGI sono le projezioni delle due faccie piane superiori. I due fianchi, o faccie verticali, saranno projettate, l'una in HNCF, l'altra in GLAD. In projezione verticale basterà rappresentare sul proprio piano la figura *cfhn*, N.° III., del fianco, elevato rispettivamente al piano della base, secondo la situazione del cuneo che si considera; e la retta OP rappresenterà il detto piano della base; O il centro della volta.

La determinazione del poliedro contenente il cuneo che vogliamo formare, è in questo caso alquanto più laboriosa che nei precedenti; nè unica è la forma del solido che soddisfaccia all' uopo; ma proporrò soltanto quella che mi sembra più semplice.

Immagino un piano condotto pei due spigoli gd, $h'f'$

N.° I; in esso sarà una faccia del solido che cerchiamo; ed altre due saranno ne' piani stessi de' fianchi dgl, $f'h'n'$. Ora immagino un piano paralello alla retta che unisce i due punti l, n', condotto per la $m'b'$, e lo nomino π. In questo piano intendo che sia una faccia del poliedro, intercetta fra i piani dei due fianchi. Adunque gli archi gl, $h'n'$, prodotti fino ad incontrare il piano π, determineranno in esso due punti, e la retta che li congiunge sarà necessariamente paralella alla ln'. Perciò, condotto un piano per quella retta e per la gh', si avrà in esso la quinta faccia. La sesta, ed ultima, potrà essere in un piano tangente in b' l' arco ellittico eb', e paralello alla retta ln', o pure alla gh'.

Per tanto sarà risolto il quesito allorchè si determini 1.° l' intersecazione del piano π col piano dell' uno, o dell' altro fianco; 2.° l' angolo che questi due piani formano fra loro. Cerco in primo luogo la retta, secondo la quale il piano π taglia il fianco $hncf$.

Pel punto O sia condotta una retta indefinita OX, paralella alla CH, e per M una normale MV alla BI.

Nel punto V sia l' incontro di quella normale colla CH. Dallo stesso punto V sia calata una normale VX alla OX in X, e facciasi la Ox eguale alla OX. Eretta per x la verticale xt, e per n condotta l' orizzontale nt, sarà nell' intersecazione t un punto della retta cercata.

Similmente potremo condurre la BΓ normale alla BI, che incontri in Γ la CH; e descritta la $\Gamma\Pi$ normale in Π alla OX, trasferiremo la misura OΠ in OP'. Quindi dal punto P' elevata la normale P'γ, e per c condotta l' orizzontale $c\gamma$, il punto γ, ove s' incontrano, apparterrà alla retta cercata.

In fatti la MV rappresenterà la projezione d' una retta, che pel punto m', N.° I, fosse condotta paralella alla ln'. Quella retta sarà dunque nel piano π, ed il suo punto d'incontro col fianco sarà projettato in V. Perciò nella verticale xt dev' essere il detto punto. Ma perchè la supposta ob-

biettiva della MV è orizzontale, quel punto stesso dev' essere nell' orizzontale $n\,t$, che sul piano del fianco è la projezione dell' obbiettiva corrispondente alla projezione orizzontale MV. Dunque l' intersecazione t determina un punto della retta cercata. Ma con discorso affatto simile si prova esser γ un altro punto della retta medesima. Per conseguenza sarà determinata la cercata retta dai due punti t, γ. Per maggiore cautela potremo determinare ancora un terzo punto della medesima retta. Siano prodotte le AG, CH ad incontrarsi in S, che dev' essere un punto della retta OIB, e per S conducasi alla OX la normale SS'. Fatta la Os eguale alla OS', s'innalzi la verticale srr', e tirisi la O$\,n\,c$, che segherà la predetta verticale in r; è per questo punto passar deve la retta cercata.

Imperciocchè i tre piani verticali, insistenti sulle rette AG, BI, CH, s' incontrano in una medesima retta verticale projettata in S; ed i tre spigoli la, $m'b'$, $n'c'$, N.° I, sono, a due, a due, in un medesimo piano. Perciò incontrano la retta verticale predetta in un medesimo punto, che sarà determinato dall' intersecazione della retta stessa, considerata nel piano del fianco C H, collo spigolo spettante a quel medesimo fianco, e projettato nella retta C N. Rappresentando dunque sr quella verticale, ed $n\,c$ lo spigolo del fianco, sarà in r l' incontro di cui si parla. Ma l' intersecazione del piano π col piano del fianco $c'f'h'n'$ deve incontrare la detta verticale nel medesimo punto, ov' essa è incontrata dalla retta che si rappresenta in $m'b'$. Quel punto sarà dunque rappresentato in r; e perciò i tre punti γ, t, r, saranno in una medesima retta, che è la cercata. Ora, prolungati gli archi hn, fc fino ad incontrare in m, e b, la retta $rt\gamma$, sarà determinata nel quadrilatero $cbmn$ l' aggiunta da fare al fianco, perchè arrivi fino al piano π; e quindi $hfbm$ sarà la figura del fianco, risguardato come una faccia del poliedro.

Assai facilmente deduconsi dalle cose già determina-

te le dimensioni, e le figure delle altre faccie; tal che è superfluo dimostrare a parte, a parte, la costruzione di ciascheduna, e procederemo piuttosto a misurare la scambievole inclinazione fra 'l piano del fianco $hmbf$, ed il piano π.

§. 134. Nella retta sr prendo un punto r', ad arbitrio, e per esso conduco una retta $r'\Delta$ normale in Δ alla rb. Se per Δ s' intenda condotta nel piano π una perpendicolare alla medesima rb, l'angolo che formerà quella perpendicolare colla $r'\Delta$ sarà manifestamente il cercato.

Per averne la misura, suppongo che la normale condotta per Δ alla rb nel piano π, giunga ad incontrare il prolungamento della retta rappresentata in $m'b'$, N.° I, e quel punto d'incontro sia congiunto col punto r' da una retta, onde si formi un triangolo terminato da essa, e dalle due predette normali, del quale cercherò di misurare gli elementi.

Il piano dell'immaginato triangolo, dovendo essere perpendicolare alla retta rb, sarà projettato sul piano del fianco $hmbf$ nella retta $r'\Delta$.

Lo spigolo poi $b'm'$, N°. I, nello stesso piano del fianco, essendo projettato sulla retta cnO, il punto ove incontra il piano dell'accennato triangolo sarà projettato in Ω, dove la CO taglia la $r'\Delta$. Siano calate le $\Delta\delta$, $\Omega\omega$ normali sulla OP, e trasportiamo le misure $s\delta$, $s\omega$ sulla SC da S in δ' ed in φ, indi da φ sia condotta la $\varphi\omega'$ normale alla SC, e secante in ω' la SB. È chiaro che $S\delta'\omega'$ sarà la projezione del triangolo immaginato, del quale è facile misurare tutti i lati; e quindi si conosceranno ancora gli angoli.

In fatti uno di questi lati è $r'\Delta$, la cui projezione orizzontale è $S\delta'$.

Un altro lato, che è quello opposto all'angolo cercato, ha la sua projezione orizzontale in $S\omega'$, e le altezze de' suoi termini sono misurate dalle rette $r's$, $\omega\Omega$; finalmente il terzo lato ha la sua projezione orizzontale in $\delta'\omega'$, e le al-

tezze de' suoi termini sono misurate dalle rette $\Delta\delta$, $\omega\Omega$.

Adunque conoscendo le lunghezze delle projezioni orizzontali, e le differenze fra le altezze dei termini, troveremo le vere lunghezze dei due lati ignoti; e quindi l'angolo che si cerca.

§. 135. Colle forme di due faccie sole del poliedro eseguiremo i tagli necessarj per compiere il cuneo. L' una delle faccie accennate sarà la *hfbm*, ove siano segnati ancora i punti *n*, *c*; l'altra sarà quella che giace nel piano π. Incomincierò l'operazione dallo scoprire il piano π, ove segnerò convenientemente la figura della faccia che giace in esso. Secondo i lati, ne' quali è congiunto ai due fianchi, scoprirò in seguito i due piani di essi, conoscendo l'angolo che formano questi piani col piano π. Sopra ciascuno dei detti due piani segnerò la figura *hmbf*, adattando il lato *mb* sul corrispondente lato già descritto nel piano π, e segnerò ancora la retta *n c*.

Allora potrò scoprire i due letti *c'n'm'b'*, *b'm'la*, N.° I, tagliando il masso secondo un piano che passi per la *nc* descritta in un fianco, e costituito normale al fianco stesso; indi secondo un altro piano che passi per la retta corrispondente descritta sull' altro fianco, e costituito similmente ad esso normale. Nello stesso modo potrò scoprire le due faccie superiori *h'f'ei*, *eigd*, avvertendo solo di non oltrepassare col taglio la linea *e i*, ove le due faccie si congiungono ad angolo entrante. Per quanto spetta alla riduzione delle faccie curve ci serviremo dei metodi già insegnati nei §§. precedenti.

CAPITOLO VI.

Costruzione della volta Conica, detta Cannoniera.

§. 136. Tagliato un cono retto, cavo, con due piani perpendicolari all' asse, il tronco intercetto dai piani secan-

ti nuovamente si tagli con un piano per l'asse; e resterà diviso in due solidi, ciascuno de' quali rappresenta la forma d'una volta conica.

Dividiamo ancora per mezzo cotesto solido con un piano per l'asse, ed esprimiamone la projezione sul piano stesso colla Fig. 76. Sarà il paralellogrammo DCFE la sezione fatta nella solidità: AD il raggio maggiore: AC il minore della faccia interna. Similmente B E sarà il raggio maggiore: BF il minore della faccia esterna. ABFC sarà la projezione della superficie interna.

Fig. 76

Sia divisa in parti eguali, di numero dispari, la semicirconferenza projettata in A D; e per ciascheduna divisione, e per l'asse, intendiamo condotto un piano, che seghi longitudinalmente la volta. Sarà così divisa in parti, ciascuna delle quali è un cuneo, se la profondità, o lunghezza AB della volta stessa non eccede la corrispondente dimensione delle pietre; ma in caso diverso conviene formare la volta con più ordini di cunei. Per tanto acciocchè i cunei di un ordine possano congiungersi con quelli di un altro in una superficie normale alla superficie interna, è chiaro che la superficie di congiunzione dovrà esser conica essa pure.

Sia dunque I un punto, per cui deve passare la divisione, e si conduca la IG normale alla CF, prolungandola ad incontrare in G la AB. Col rotare della GIL intorno all'asse AB si genera una superficie conica normale a quella della volta, ed a tutti i piani condotti per l'asse, che la dividono longitudinalmente. Cotal superficie sarà dunque opportuna per separare un cuneo d'un ordine dal suo contiguo nell'altro.

Consideriamo la forma di uno di quelli che appartengono all'ordine posteriore, e prendiamo ad esempio quello di mezzo, cioè la serraglia, dovendosi intendere le medesime cose ancora degli altri, che sono nel medesimo ordine.

Le faccie che lo comprendono saranno sei. Tre coniche, cioè l'esteriore, generata dalla retta DL: l'interna gene-

nerata dalla CI : la terza, che è quella di congiunzione, generata dalla LI. Le tre altre sono piane ; e due simili ed eguali alla DLIC : una, che è la fronte del cuneo, è una parte dell' anello circolare projettato in DA, e generato dalla CD, cioè quella parte che giace compresa fra i due piani condotti per l' asse, terminanti il cuneo.

Da queste considerazioni si passa a determinare le faccie del poliedro, che contiene esso cuneo.

Sia dunque CH la projezione dell'arco interiore, in cui termina la fronte del cuneo; IN sia projezione dell' arco simile descritto dal punto I. Condotta la retta HN, sarà determinata nel quadrilatero CHNI la projezione della superficie interna del cuneo; ed è chiaro che il poliedro cercato sarà compreso fra sei piani : due projettati in DL, HO : due projettati in DH, LO, essendo LO in direzione normale alla AB. I due ultimi saranno quelli che passan per l' asse, e contengono i fianchi del cuneo.

Adunque per determinare le faccie del poliedro conosciamo gli angoli LDA, NHA, secondo i quali sono rispettivamente inclinati alla fronte DH i due piani DL, NH. In oltre conosciamo le lunghezze DL, HD; e finalmente la figura della fronte, che possiamo rappresentare descritta separatamente in $h\delta\delta' h'$, essendo hch' l'arco projettato in CH : ada' il simile descritto dal punto D : hh' la corda del primo arco : $\delta\delta'$ la tangente del secondo, intercetta fra i prolungamenti dei lati ha, $h'a'$.

§. 137. Scoperto dunque nel masso prima il piano HD, in esso convenientemente si adatti la forma $\delta\delta' h' h$, e pel lato $\delta\delta'$ si diriga una sezione piana inclinata al piano DH secondo l' angolo LDA; indi pel lato hh' dirigasi un' altra sezione piana inclinata allo stesso piano DH secondo l' angolo NHA. Di nuovo pei lati δh, $h'\delta'$ dirigansi due sezioni piane normali alla fronte DH. Avremo con queste operazioni scoperte cinque faccie, e parimenti i quattro spigoli rettilinei, due de' quali son projettati nella retta

D L , e due nella H O . Perciò , applicate le rispettive loro dimensioni DL , HO , verremo a determinare i quattro loro estremi projettati , due in L , e due in O . Laonde per essi facendo passare una sezion piana , si scoprirà l' ultima faccia del poliedro , che è projettata in L O , e simile alla $\delta h h' \delta'$.

La riduzione delle faccie curve si compirà imitando meccanicamente la maniera con cui si concepiscono percorse quelle superficie dalle rispettive generatrici .

Si adatti allo spigolo rappresentato in H O quello d' un regolo abbastanza solido , perchè non si curvi nel suo prolungamento , che deve arrivare fuori del fianco , ove è fermo, e giugnere fino al punto , che è vertice della superficie conica interna . Cotal prolungamento sarà di lunghezza terminata e nota ; cioè determinato sul detto spigolo del regolo sarà quel vertice . Ivi sia fermo l' estremo d' un filo sottile ed uniforme , o si appoggi lo spigolo d' un altro regolo , e si scolpisca interiormente il masso guidando lo scalpello a seconda del filo teso , o del regolo accennato , che scorrano sull' arco projettato in C H . È chiaro che lo spigolo mobile , o il filo teso , faranno la funzione della retta generatrice ; e quindi la superficie che verrà scoperta dallo scalpello , condotto in tal modo , sarà quella che cercasi .

Per cautela maggiore si potrà descrivere sul piano LO l' arco projettato in MO , simile , e corrispondente a quello che è projettato in C H ; e su questo nuovo arco si riscontrerà se il lavoro proceda con esattezza .

Non è punto dissimile dalla descritta, la maniera di ridurre , quando sia d' uopo , la superficie esterna , ed ancora quella della congiunzione trasversale , che è generata dalla retta GL . La projezione di questa faccia è rappresentata dallo spazio ILKN .

Le medesime considerazioni si riferiscono al cuneo corrispondente dell' ordine anteriore . E per quanto spetta al poliedro che lo deve contenere , si osservi che la sua faccia

verticale opposta alla ER deve passare per I, perchè in LINK sarà la projezione di quella faccia, ove si congiungono i due cunei; la quale è concava nel precedente, e convessa in quello di cui parliamo. Adunque per operare con esattezza, converrà descrivere sulla faccia del poliedro, projettata in QIN, l'arco projettato in NI, simile a quello che è projettato in FR, ed appoggiare dovrassi a quell'arco il filo, od il regolo, che dirige la scultura della faccia interna projettata in IFRN, come pure la scultura, per cui formasi la faccia convessa projettata in LINK.

§. 138. Quando le condizioni dell' edifizio prescrivano una forma obliqua alla volta conica, si faranno le riflessioni che abbiamo indicato pei casi analoghi delle volte cilindriche. Sminuzzare tutti i casi, e le pratiche necessarie particolarmente a ciascheduno, sarebbe troppo lunga fatica, superflua per quelli che intendono i principj, ed hanno immaginazione atta a cotesti argomenti, inefficace per quelli ai quali mancano i talenti necessarj.

CAPITOLO VII.

Costruzione della volta emisferica.

§. 139. Un solido compreso fra due superficie sferiche, concentriche, e tagliato da un piano che passi pel centro, somministra in ciascheduna delle sue metà un modello della volta emisferica. Per dividerla in cunei, divido in parti eguali una semicirconferenza, interna, o esterna, della sua base, ed in parti pure eguali, o ancora diseguali, ma decrescenti verso la sommità della volta, un quadrante di qual si voglia suo circolo massimo perpendicolare alla base, e lo nomineremo meridiano.

Pei punti di queste ultime divisioni descriverò altrettanti circoli minori paralelli alla detta base, giacenti nella superficie interna, o esterna, cui spetta il meridiano. Imma-

giniamo che per ciascuna delle descritte circonferenze paralelle passi una superficie conica, posta col suo vertice nel centro della volta, e ne penetri la solidità. Tutte queste superficie coniche saranno perpendicolari alle due superficie sferiche, interna ed esterna; e per esse verrà divisa la volta in anelli che noi chiameremo ordini, o filari quando saranno divisi in cunei.

Per eseguire questa seconda divisione conduco altrettanti piani meridiani, quanti sono i punti dividenti la semicirconferenza della base.

Ciascun filare verrà diviso in parti eguali, e simili, che saranno altrettanti cunei della volta.

I piani meridiani, e le superficie coniche, oltre ad essere perpendicolari alla superficie interna, ed esterna, della volta, sono ancora normali reciprocamente fra loro. Adunque la divisione ha tutte le condizioni che dimanda la solidità, e permette di comporre le parti dell' edificio in modo che i cunei si contengano vicendevolmente colle pressioni reciproche, e si possano interrompere tutti i piani verticali, nei quali cadono le congiunzioni dei fianchi. Imperciocchè si osservi che in qualunque luogo della superficie superiore in cui termina un filare, si può adattar il letto d' un cuneo qualunque del filare immediatamente superiore. Adunque potremo con un cuneo superiore coprire la commettitura verticale di due cunei inferiori; e così non solamente sarà interrotta la continuità dei piani verticali, dove sono le congiunzioni de' fianchi; ma ancora i filari successivi si addenteranno vicendevolmente, dovendo riuscire i cunei necessariamente disposti come suol dirsi a morse.

§. 140. Descriviamo ora la forma di un cuneo, o le sei faccie che le comprendono. Due sono sferiche simili, e paralelle: una convessa esteriore, l' altra concava interna. Due piane, eguali e simili fra loro; e ciascheduna compresa da due rette eguali, e da due archi simili, e paralelli che le congiungono. Le due ultime faccie sono coniche, concen-

triche ; l'una concava superiore, l' altra convessa, inferiore. Un poliedro contenente questo cuneo avrà la forma d' un tronco piramidale contenuto da sei faccie : una tangente la faccia conica convessa del cuneo lungo la retta che la divide per mezzo : una sottesa alla faccia conica concava : due giacenti ne' piani stessi dei fianchi : una sottesa al quadrilatero sferico interno: una tangente l' esterno .

Sia projettato orizzontalmente nella figura M M' O' O il cuneo di cui trattiamo; C rappresenti il centro della volta: *n n' m' p' o' opm* sia la corrispondente projezione verticale del medesimo cuneo, descritta sul piano d' un suo fianco . Prendo a determinare la faccia del poliedro, che tocca la faccia conica convessa del cuneo . Fig. 77

Diviso per mezzo in I l' arco O O', e condotta la tangente T I T', è manifesto che in essa è la projezione di quella retta, che giace nel piano cercato, e tocca nel punto di mezzo l' arco del cuneo projettato orizzontalmente in O O', e verticalmente in *o o'*. In oltre i punti T, e T', ove la retta TT' incontra le due CO, CO', nelle quali son projettati orizzontalmente i due fianchi, saranno projezioni dei punti, ove la detta tangente incontra i piani dei fianchi stessi. Adunque per quei punti d'incontro, e pel centro della volta passa il piano cercato; e perciò, fatta la C*t* eguale alla CT, ed elevata la normale *t t'*, in essa dovrà essere il punto d' incontro projettato orizzontalmente in T . Ma deve ancora trovarsi nella retta orizzontale *o o'* , la quale contiene la projezione verticale , e dell'arco , e della tangente ; dunque in *t'*, dove si tagliano scambievolmente la *t' t* , e la *o' o* , sarà sul piano del fianco *nmpo*, il punto ov' esso piano è incontrato dalla tangente predetta ; e quindi nella retta C *t'* sarà l' intersecazione del piano del fianco , e del piano cercato .

Ora prolungo gli archi *no*, *mp* in *r*, e *q* ; e col centro C descrivo separatamente , per evitare la confusione, l' arco Y X eguale e simile all' arco *n r* . Divido per mezzo l' arco YX in G , e per G conduco la tangente G Z che incontri in

Z il raggio prolungato C X. Fatta poi la C Z', eguale alla C Z, conduco la Z'z normale in z alla C D, e pongo la CZ'' eguale alla C z. Descrivo poi la retta S Z'' S'' paralella alla tangente T T', e compresa fra le rette C O, C O' prolungate quanto è mestieri. Sarà S S' projezione orizzontale dello spigolo, ove si congiugono le due faccie del poliedro tangenti le due faccie convesse del cuneo. Adunque nel punto S è la projezione orizzontale di quello, ove lo spigolo sopr' indicato incontra il piano del fianco. Quel punto medesimo deve dunque trovarsi ancora nella C t'; e se faremo la C s eguale alla C S, innalzando la s s' normale alla C D, in quella normale sarà pure il punto predetto, che perciò è determinato dalla scambievole intersecazione s' delle due C t', s s'.

Determinate queste cose, possiamo tosto descrivere qualunque faccia del poliedro. Imperciocchè se vogliasi la figura di un fianco, basterà condurre per s' una paralella alla corda m q, fino ad incontrare in u il prolungamento della mn; ed il quadrilatero rettilineo mus'q determinerà la figura cercata. Se vogliasi la faccia del poliedro sottesa alla faccia conica concava del cuneo, due lati opposti saranno eguali fra loro, ed alla retta mu; questi sono similmente inclinati agli altri due paralelli, e diseguali, uno dei quali eguaglia la corda dell'arco M M', l'altro eguaglia la retta projettata verticalmente in hu, della quale è manifesto come si determini agevolmente la vera lunghezza H V.

Ma per la costruzione del cuneo basterà preparare la forma della faccia tangente la sua faccia conica convessa, e quella del fianco mpqron. Questa abbiam già veduto come si determini; l'altra è un trapezoide, i cui lati paralelli eguagliano rispettivamente le due rette Q Q'', S S', dei quali il primo, cioè Q Q'', si determina calando la normale q k sulla CD, e fatta CQ eguale alla Ck, conducendo la Q Q'' paralella alla S S'. Ciascuno degli altri due lati eguali, opposti, ed egualmente inclinati ai due paralelli, s'eguaglia alla retta qs'.

Conviene ancora misurar l' angolo d'inclinazione, che forma il piano di ciascun fianco col piano tangente la superficie convessa inferiore del cuneo, e nominerò φ cotal angolo, senza arrestarmi a mostrare in qual modo si trovi la sua misura; essendo questo un problema troppo facile a risolvere.

Incomincio a tagliare il masso secondo il piano che deve toccare la faccia conica convessa. In questo piano adatterò la forma ora determinata; indi seguendo i piani che passano pei due lati eguali della forma medesima, e sono inclinati col suo piano secondo l' angolo φ, eseguirò col solito metodo le due sezioni, che debbono scoprire i due fianchi. Su ciascheduno dei detti piani adatterò la forma del fianco, in modo che il lato qr coincida col lato corrispondente già segnato nel piano soggetto, ed avrò così determinati quattro punti m, p, p', m', pei quali deve passare il piano sotteso alla faccia sferica concava del cuneo; come pure i punti m, n, n', m', pei quali passa il piano sotteso alla faccia conica concava. Si possono omettere i tagli che scoprano le due faccie opposte, le quali corrispondono alle due faccie sferiche del cuneo; conciossiachè abbiamo nei punti, e nelle linee notate, quanto basta per arrivare alla descrizione di esse due faccie.

Passo dunque a questa parte dell' operazione, ed incomincio dalla faccia sferica interna.

Supponghiamo posato il poliedro sopra un piano orizzontale col suo fondo $q'qs'$; indi rimanendo in quel piano il lato qs', si elevi il lato opposto fino a tanto che il piano del fianco mqs' divenga verticale. Prolungato allora il lato $s'q$, e sopra di esso notato il punto C, che rappresenta il centro della superficie sferica interna, abbiavi un regolo, il quale con un estremo fermo nel punto C possa aggirarsi intorno ad esso come centro, e nel piano soggetto orizzontale descrivere coll' altro estremo un circolo massimo della superficie interna predetta. Si prepari in oltre una forma di tavola, o di lamina esattamente piana, il contorno del-

la quale sia tagliato con diligenza secondo il circolo ora descritto, per un tratto poco maggiore dell'arco *mq*, ed abbia un lato rettilineo normale a cotesto suo margine circolare. È manifesto che il contorno curvo della forma si adatterà all'arco *mq* segnato nel fianco, ed il lato rettilineo si adatterà nel tempo stesso alla retta C*q*, formando colla *qs'* una sola retta continua. Se innoltre il lato rettilineo della forma sia connesso col regolo mobile intorno al punto C, per modo che il punto, ove si congiunge il contorno circolare della forma col detto lato rettilineo, cada sull'estremo del regolo corrispondente al punto *q*, si vede che passando esattamente per C il piano della forma, costituito sempre verticale, mentre il regolo si aggira intorno al punto C, il contorno curvo della forma si troverà in una superficie sferica eguale, e simile alla superficie interna della volta; e perciò guidando lo scalpello a seconda di quel contorno, si scoprirà la faccia sferica concava del cuneo.

Collo stesso meccanismo si otterrà la riduzione della faccia sferica convessa; se non che in vece di adoperare una forma tagliata in convesso, come la precedente, si prenderà una forma tagliata in concavo, secondo l'arco *n o r*.

Per quanto spetta alla riduzione delle due faccie coniche, intendasi applicato al problema presente ciò che abbiam detto nel §. 136, trattando della volta conica.

§. 141. Dai pochi esempj che abbiamo preso in esame circa le volte di più semplice forma, è lecito conchiudere che non è cosa facile il soddisfare perfettamente in pratica a tutte le condizioni necessarie, perchè la composizione d'una volta in cunei di pietra si compia senza difetto. Perciò è lodevole consiglio in architettura preferir sempre le figure più semplici, quando circostanze particolari non prescrivano espressamente il contrario. Questa massima, che dai migliori architetti italiani è posta fra le regole concernenti alla bellezza, parmi confirmata con vie più forti ragio-

ni

ni dalle leggi della meccanica, e dell' economia. Alle osservazioni già fatte sopra la differenza delle due volte cilindriche, una di sesto circolare, l' altra di sesto ellittico, §. 126, possiamo aggiugnere ancora il confronto delle volte sferiche, e delle sferoidiche.

Se queste sian divise con piani meridiani, cioè condotti per l' asse verticale della volta, le sezioni andranno soggette a quelle obbiezioni medesime, che fatte abbiamo alle sezioni trasversali della volta cilindrica ellittica.

Le altre sezioni della volta sferoidica si faranno per mezzo di superficie coniche, come nella volta sferica. Ma se in questa le dette superficie dividenti hanno il vertice comune nel centro della volta, in quelle, i vertici delle superficie coniche dividenti un filare dall'altro, cadranno bensì tutti nell' asse della volta, ma ciascheduno in un punto diverso dagli altri. Imperciocchè quelle superficie coniche, per essere normali alla superficie interna sferoidica, è mestieri che sian generate da rette normali all'ellisse generatrice della detta superficie. Ma coteste normali incontreranno in punti diversi l' asse dell' ellisse, che è pur quello della volta; dunque i vertici delle superficie coniche da esse normali generate cadono in punti diversi dell' asse.

Questa particolarità aggiunta alle altre accennate, accresce la briga nell' esecuzione.

Così fatte osservazioni possono estendersi ancora a tutte quelle volte, le cui superficie interne siano generate per la rotazione di altre curve intorno all' asse verticale, le quali soglion chiamarsi *volte a catino*. Ma stabilita la loro forma, e quindi determinate tanto le sezioni che produconsi dai piani meridiani, quanto le altre che si producono dalle superficie coniche normali ad un' ora e alla superficie interna della volta, ed ai menzionati piani, è facile vedere quali modificazioni si richieggano al metodo esposto nel precedente §. 140 per condurre similmente a termine la formazione de' cunei, de'quali compor si debbono le volte menzionate.

CAPITOLO VIII.

Costruzione della volta a Cupola.

§. 142. Componendo le due volte semplici, cilindrica, e sferica, si ottiene quella specie che è detta *a Cupola*.

Parrà dunque che nulla resti a dire sopra di questa, poichè bastantemente fu ragionato delle altre due. Ma le circostanze della loro composizione dimandano alcune riflessioni particolari, che formeranno il soggetto di questo Capitolo.

Fig. 78 Sugli angoli d'un' area quadrata $\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{Q}$, Fig. 78, siano similmente collocati quattro stipiti, o pilastri, della forma $\mathcal{N}\mathcal{L}\mathcal{L}'\mathcal{L}''$ ec. Fatto centro in O, dove si tagliano le diagonali, e coll' intervallo O$\mathcal{N}$, descrivasi un circolo, nel quale intenderemo essere la projezione orizzontale d' una superficie emisferica. Questa sia tagliata da quattro piani insistenti sui lati del quadrato $\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{Q}$, e normali al suo piano, che supponghiamo orizzontale.

Le sezioni saranno tutte eguali, e simili al semicircolo MRN, descritto sul diametro MN, eguale al lato $\mathcal{M}\mathcal{N}$. Supponghiamo nuovamente segata la superficie emisferica da un piano, che tocchi le sommità di tutte le quattro sezioni circolari precedenti; e nascerà nella superficie stessa una quinta sezione piana, circolare, orizzontale, eguale, simile, e paralella alla sua projezione $\mathcal{S}\mathcal{T}\mathcal{V}\mathcal{X}$, che è il circolo inscritto nel quadrato $\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{Q}$.

Dopo tutte le indicate sezioni rimarranno della superficie sferica quattro triangoli eguali, e simili fra loro, ciascun de'quali sarà contenuto da tre quadranti eguali al quadrante MR, e costituirà la faccia interna di quella parte dell'edifizio, che si chiama *peduccio*, ed anche *pennacchio* della Cupola.

Si eleva in seguito il tamburro, che è un tronco cilindrico verticale, la cui superficie interna è projettata nel

circolo $\mathcal{S}\mathcal{T}\mathcal{V}\mathcal{X}$, e sopra di esso tronco cilindrico posa la volta emisferica, che termina la cupola.

Il peduccio si congiunge agli archivolti fra i quali giace; e sono questi altrettante volte cilindriche, erette sui pilastri, l'ampiezza, o diametro delle quali, è l' intervallo de' pilastri medesimi.

Rappresentiamo verticalmente la fronte d'un archivolto nello spazio MRNLGJ, compreso fra i due semicircoli concentrici MRN, JGL; e nel triangolo mistilineo KMR sia projettata verticalmente la superficie interna del peduccio, la cui projezione orizzontale corrispondente sarà nel triangolo mistilineo $\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{T}$. La congiunzione tra la superficie del peduccio, e quella dell'archivolto, riuscirà nel quadrante RM.

Consideriamo separatamente, e l' archivolto, ed il peduccio. Ciascheduna di coteste parti si dividerà in cunei nella maniera conveniente alla loro specie; cioè l'archivolto si dividerà solamente per mezzo di piani condotti per l' asse della sua superficie cilindrica, potendo la lunghezza de' cunei adeguare la profondità dell' archivolto, misurata dalla retta aa'. Il peduccio poi si dividerà per mezzo di piani meridiani, e di superficie coniche, secondo quello che fu insegnato nel §. 138. Ma dovendosi congiungere in un medesimo solido un cuneo dell' una con uno dell'altra specie, conviene esaminare le particolarità di questa unione. Sia dunque ABCD la faccia interna d' un cuneo, che spetta all' archivolto: EBCF rappresenti la faccia interna del cuneo contiguo spettante al peduccio: PQEFI sia la projezione del suo fianco; cioè di quella faccia che giace nel piano meridiano condotto pei tre punti corrispondenti alle projezioni verticali E, F, T, la quale abbia un lato PI nel piano MRN, essendo I' il punto d' incontro del raggio projettato in TE col piano MRN.

Perchè la faccia superiore del cuneo giace in una superficie conica retta, il cui vertice è projettato in T, e la direttrice è il circolo projettato nella BE, prodotta dall'una

e dall' altra parte, è chiaro che l' intersecazione di questa superficie col piano verticale MRN sarà iperbolica. Dunque la detta faccia superiore del cuneo si congiunge al piano MRN in un arco I'xB d' iperbole, sotteso alla retta I'B. Similmente si conchiuda dell' altra congiunzione tra 'l piano medesimo, e la faccia inferiore, parimenti conica, di cui veggiamo tre vertici C, F, I. Le iperbole, alle quali appartengono gli accennati archi di congiunzione, sono determinate; e quindi ancora determinati sono gli stessi archi, e potranno essere descritti. Per tanto volendo considerare uniti in un medesimo solido il cuneo dell' archivolto, e quello del peduccio, riscontreremo nel composto le seguenti tredici faccie, che determinano la sua figura. Una cilindrica, la cui base è l' arco A D, e l' altezza la retta aa'; comune sarà l'altezza medesima a cinque altre faccie piane rettangole: due eguali e simili, projettate in AB, CD: le altre tre dissimili, projettate rispettivamente nelle rette H B, C I, P I. Vi sono pure tre altre faccie piane; ed una sarà rappresentata in ABHPICD, la quale forma il fondo, o la faccia posteriore del solido: un' altra sarà il fianco rappresentato in QEFIP: una terza, che sarà projettata orizzontalmente nella figura $pqhh'p'$, e verticalmente nella retta PH. A tutte le già descritte aggiunger dobbiamo una faccia piana ABCD, e tre faccie curve; cioè una sferica rappresentata in BCFE: due coniche, l' una superiore, l' altra inferiore, come abbiam già avvertito.

Ma per maggior facilità nella costruzione, le ultime due faccie possono farsi piane anch' esse, tanto più che piccolissimi essendo gli archi iperbolici sottesi alle rette I' B, I C, si confondono quasi colle rette medesime; e perciò è lecito far quelle faccie di forma piana mistilinea; cioè la superiore sarà compresa dalle tre rette projettate nelle QH, HB, QE, che giacciono in un piano, il quale passa pel centro della superficie sferica, nella quale sono le faccie dei peducci, e dall' arco di circolo massimo esistente in cotal

piano, ed intercetto fra i due punti projettati in E, B. Similmente l' inferiore sarà compresa dalle due rette rappresentate in CI, FI, e dall' arco di circolo massimo, intercetto fra i punti C, F.

§. 143. Non ostante la forma complicata di questo solido, si determina con somma facilità il poliedro che lo contiene. Imperciocchè descrivasi la projezione orizzontale *e* di quel punto, che verticalmente è projettato in E, e si tiri la retta *e d d'*, che dal punto *e* cade normale sulla $\mathcal{L}''\mathcal{L}'$ prolungata. È manifesto che un solido nella cui base contengasi la figura ABHPIFCD, e l'altezza eguagli la misura *ed'*, conterrà il solido composto dai due cunei.

Nè sarà men facile la riduzione di tutte le faccie. In fatti sia spianato il fondo del masso, e descrivasi in esso la figura rettilinea ABHPIFCD, e l' arco DA.

Scopriremo prima le faccie piane perpendicolari al fondo, e projettate sui lati BA, CD, BH, PI. In seguito la faccia cilindrica projettata nell' arco AD, e successivamente la fronte ABCD. Posato poscia il solido sulla faccia BA, in modo che la faccia ABCD riesca esattamente verticale, si scoprirà la faccia sferica nel modo che fu insegnato, §. 140, e noteremo in essa i punti projettati in E, B, C, F. Eseguite queste cose, pei punti corrispondenti alle projezioni E, B, T, si farà passare un taglio piano, ed un altro pei punti corrispondenti alle projezioni F, C, T. Questi due tagli scopriranno le due faccie sostituite alle due coniche, ed altro non resterà che scoprire le faccie piane, normali al fondo, e projettate in CI, PH, rispettivamente.

CAPITOLO IX.

Costruzione della volta anulare.

§. 144. Chiamo anulare quella specie di volta, che ricopre con una sola superficie continua il vano frapposto a

due pareti, elevate sopra basi curve, rientranti, e paralelle fra loro.

Fig. 79 Suppongo ancora che la sezione piana orizzontale de' muri, sui quali posa la volta, si rappresenti in A B C ec. *a b c* ec., Fig. 79.

La retta B*b* sia perpendicolare alle due curve predette, rappresentanti in projezione orizzontale le superficie interne de' muri, e la curva B 3 *b* rappresenti il sesto della volta, cioè la sezione fatta nella sua superficie interna da un piano verticale insistente sulla B *b*. Immaginiamo che la retta B *b* scorra fra le due curve A B C ec., *a b c* ec., sempre ad esse normale, portando seco il piano verticale predetto, e la curva B 3 *b* in esso descritta. Questa descriverà la superficie interna della volta, mentre la B *b* percorre co' suoi estremi le due curve A B C ec., *a b c* ec. Che se nel piano stesso B 3 *b* si descriva ancora la sua intersecazione E4*e* colla superficie esterna, e si formi la figura B3*b*e4E, questa seguendo il movimento sopra indicato, percorrerà tutta la solidità della volta proposta.

Ora dividiamo la curva B 3 *b* in parti, una delle quali sia l'arco 1 3. Ne' suoi estremi 1, 3 conduciamo le normali 1 2, 3 4, producendole ad incontrare l'arco esterno in 2, 4. Restituito alla sua posizione verticale il piano B 3 *b*, ed eseguendo il movimento, che abbiamo testè indicato, ciascuna delle due normali 1 2, 3 4 percorrerà una superficie perpendicolare tanto al piano della curva generatrice B 3 *b*, quanto alla superficie da essa generata.

Se dunque la volta si divida trasversalmente per mezzo di piani verticali, e perpendicolari alle due curve ABC ec., *a b c* ec., e longitudinalmente per mezzo di superficie generate da rette normali alla curva B 3 *b*, saranno pienamente osservati i precetti del §. 114.

Ogni parte della figura generatrice B3*b*e4E, intercetta fra due normali, come il quadrilatero mistilineo 1 2 4 3, percorre lo spazio occupato da un filare di cunei, mentre

tutta la figura generatrice percorre lo spazio occupato da tutto il solido della volta. Perciò misureremo la lunghezza del cuneo secondo le linee che si descrivono dai punti 1, 2, 3, 4, ed il quadrilatero 1 2 3 4 sarà considerato come la base.

Esaminiamo la figura d'un cuneo spettante al filare, che è determinato dal quadrilatero generatore 1 2 4 3. Sei faccie lo comprendono: due piane, eguali, e simili al quadrilatero stesso: due curve generate dalle due normali 1 2, 3 4, che sono i fianchi del cuneo: altre due curve anch' esse, generate dagli archi 1 3, 2 4, che giacciono, l' una nella superficie interna, l' altra nell' esterna.

§. 145. Per determinare il poliedro in modo che agevoli la riduzione delle faccie curve ora indicate, concepisco elevato in posizione verticale il piano B 3 *b*, ed allora immagino condotto pel punto 1 un piano orizzontale che seghi in 5 il prolungamento della normale 4 3. Mentre il quadrilatero 1 2 4 3 percorre la solidità del cuneo, i punti 1, 5 descriveranno nel supposto piano orizzontale due curve paralelle, che possono essere facilmente descritte nel proprio loro piano.

In fatti siano condotte dai punti 1, 5 le rette 1 *h*, 5 *f* normali sulla B *b*; e scorrendo questa fra le due curve A B C ec., *a b c* ec., sempre ad esse normale, descriverà coi punti *f*, *h* due curve rispettivamente eguali, simili, e paralelle alle due, che vogliamo descritte dai punti 1, 5. Adunque si potrà descrivere la figura piana generata, o percorsa, dalla retta 1 5 coll' accennato movimento; e la rappresenteremo in 1' 1'' 5'' 5'.

Pel punto di mezzo *m* della curva 1' 1'' conduciamo ad essa una tangente 6 6', intercetta fra i prolungamenti dei lati 5' 1', 5'' 1'', e paralella alla tangente sia condotta la retta 5' 7 dal punto 5', più lontano che l'altro 5'' dalla tangente 6 6'. Conduciamo pure la *m n* normale alla 6 6', e per conseguenza ancora alle curve 1' 1'', 5' 5''.

Sopra i lati 5' 6, 7 6' siano eretti due piani verticali, ed un altro parimenti verticale immaginiamo che insista sulla *m n*. Fingiamo descritta in questo piano una retta, la quale comprenda in *m* colla *m n* un angolo eguale all' angolo 2 1 5. Sarà determinato il piano che passa per quella retta, e per la 6 6', come pure determinate saranno le sue intersecazioni cogli altri due piani, che abbiamo eretti verticali sulle 5' 6, 7 6'; e quindi ancora gli angoli che quelle intersecazioni comprendono rispettivamente colle rette 6 5', 6' 7. Descriviamo quello che forma in 6' colla 6' 7 l' intersecazione del mentovato piano con quello che insiste verticale sulla 6' 7, e sia l' angolo M N O, che deve necessariamente superare l' angolo 2 1 5. Nel piano verticale 6' 7, pel punto 6', s' innalzi una retta che formi colla 6' 7 un angolo eguale all' angolo M N O. Se taglieremo il masso secondo un piano condotto per quella retta, e per la 6' 6, si scoprirà la quarta faccia del poliedro: la prima essendo il quadrilatero 6 6' 7 5', e le due seguenti giacendo nei piani verticali 6' 7, 5' 6. Si passi alla quinta; e prima osserviamo che gli angoli 6 5' 7, 6' 7 5' debbon essere ottusi; esaminiamo quale dei due sia maggiore, e posto che sia l' angolo 5' 7 6', nel piano verticale 6' 7 s' innalzi dal punto 7 una retta, la quale comprenda colla 7 6' un angolo eguale all' angolo 4 5 1. Tagliando il masso secondo quel piano che passa per cotesta retta, e per la 7 5', si scoprirà la quinta faccia del poliedro. E siccome per l' operazione precedente riescono determinati i due spigoli, che insistono sui punti 6', 6, così dall' operazione ora descritta riesciranno determinati i due spigoli insistenti sui punti 7, 5'. La sesta ed ultima faccia si ottiene facendo passare un piano orizzontale pel punto 4, allorchè il piano della curva generatrice B 3 *b* è verticale sulla B*b*. Perciò la lunghezza delle due rette, o degli spigoli insistenti sui punti 1', 1'', sarà eguale alla 1 8, intercetta fra le due 1 5, 4 8, paralelle alla B*b*; e la lunghezza degli altri due spigoli insistenti sui punti 5', 5'', sarà eguale alla 4 5. I quattro estremi

mi superiori degli spigoli saranno in un medesimo piano, secondo il quale dirigendo l'ultimo taglio, verrà scoperta la sesta faccia.

§. 146. Preparato il poliedro, si proceda alla riduzione del cuneo. E prima immaginiamo descritta l'evoluta delle due curve, alle quali appartengono gli archi 1'1", 5' 5"; la quale è manifestamente eguale e simile alla evoluta delle due curve A B C ec., *a b c*, ec. Sopra di essa innalziamo la superficie degli assi, la quale sarà cilindrica.

A questa avvolgiamo due fila, fermate in essa coi loro estremi, ed un filo potrà giacere nel piano stesso delle due evolventi 1' 1", 5' 5". Prolungate poscia fuori della superficie degli assi, e tese egualmente ambedue le fila, si conducano nel piano verticale, che insiste sul lato 6' 7; e notisi nel filo inferiore il punto 5": nel superiore poi si noti il punto ove taglia una retta, che dal punto 5" s'innalza paralella allo spigolo insistente sul punto 7. A questa retta adatteremo esattamente un regolo col suo spigolo bene affilato, appiccandovi le due fila ne' due punti notati, onde tirando poi dolcemente il regolo verso 6', le due fila ad esso attaccate si stendano egualmente, e costituiscano colle loro direzioni un piano verticale tangente la superficie degli assi, e per conseguenza perpendicolare alle due evolventi 1'1", 5'5".

Facciamo scorrere il piede del regolo lungo l'evolvente 5" 5', e frattanto svolgansi dalla superficie degli assi le due fila, sempre egualmente tese in un piano verticale, tangente la detta superficie. È chiaro che in questo movimento lo spigolo del regolo fa l'ufficio della generatrice 4 5, percorrendo una superficie concava insistente sull' arco 5" 5', nella quale giace una faccia del cuneo, cioè quella che si genera dalla retta 4 3.

Se dunque svolgendosi le fila nel modo sopraddetto, il regolo potesse penetrare nella solidità della pietra, toglierebbe quella parte, che nasconde la superficie cercata. Ora

quel che non può fare il regolo, faccia lo scalpello, condotto da esso regolo, ed otterremo egualmente l'intento.

Simile del tutto è l'operazione per discoprire l'opposta faccia convessa, generata dal lato 2 1. Nè di più lunga spiegazione fa mestieri per intendere come si riducano le rimanenti due faccie, inferiore, e superiore, generate dagli archi 1 3, 2 4.

Imperciocchè, nel piano delle due fila, basta adattare convenientemente la forma del triangolo mistilineo 1 3 5, in maniera che mentre il lato 1 5 della forma percorrerà la figura 1' 1'' 5'' 5', l'arco 1 3 percorra la faccia inferiore del cuneo; e perciò lo scalpello, seguendo il contorno curvo 1 3 della forma, scoprirà di mano in mano la faccia che si cerca, facendo luogo al movimento progressivo della forma, e delle fila, che la conducono. Similmente adattata nel piano delle fila la forma del triangolo mistilineo 2 4 8, determineremo col viaggio dell'arco 2 4 il luogo della superficie convessa opposta, che è l'esterna.

Nel ragionamento feci uso delle due fila, perchè meglio rappresentano due linee; ma in pratica hanno il difetto di allungarsi inegualmente, secondo la forza dalla quale sono tese, e che difficilmente si regola con esatta uniformità. Preferisco dunque volontieri alle due fila due strette fettuccie di lino fino, ed intrise di qualche gomma, o vernice, che rattenga la loro naturale elasticità. Anche più sicura è l'esattezza dell'operazione, adoperando tre fettuccie in vece di due sole.

Ma per ajutare la precedente descrizione verbale, aggiu-
Fig. 80 gnerò la Fig. 80, ove il solido X Y Z Q V' VI' VI VII rappresenta il descritto poliedro. Gli archi I I', V V' corrispondono ai due 1' 1'', 5' 5'' della Fig. precedente. La loro evoluta sarà *t t' k* ec.; e la superficie degli assi *t t' k* K T' T sia prodotta indefinitamente dalla parte superiore. Nella linea VI I V *t* è rappresentata la parte rettilinea del filo inferiore, e nella curva *t t' k* la parte inferiore del medesimo fermato

coll' estremo *k* nella superficie degli assi. La linea M T rappresenta la parte rettilinea del filo superiore, fermato pure nella detta superficie coll' estremo K.

La retta V M corrisponde allo spigolo del regolo, cui sono attaccate le due fila in V, M, costituite nel piano M V *t* T verticale, e tangente la superficie degli assi lungo la retta verticale T *t*. Scorrendo il piede del regolo da V in P, e conservandosi sempre verticale il piano delle fila ad esso attaccate, e queste sempre egualmente tese, il punto V descriverà l' arco V P, ed il punto IV descriverà contemporaneamente l' arco IV *p*, mentre il punto M passerà in N, ed il piano delle fila sarà trasferito nella posizione NP*t*'T', toccando la superficie degli assi lungo la retta verticale T'*t*'. Se dunque si faccia luogo al conceputo movimento, togliendo collo scalpello a poco a poco l' unghia solida V IV *p* Q V' VII X, lo spigolo V M progredirà nel suo moto scorrendo sulla superficie concava IV *p* Q V' P V, nella quale è poi facile segnare l' arco III R descritto dal punto III, che deve essere un lato del cuneo.

Terminata questa operazione, riconduciamo le fila nel piano IV M T, avvolgendole nuovamente alla superficie degli assi, ed in quel piano si adatti la forma I V III del triangolo mistilineo, il cui lato curvo I III deve generare la superficie concava inferiore. Il lato I V deve coincidere sempre col filo inferiore fra i medesimi punti I, V, ed il lato V III deve sempre adattarsi allo spigolo del regolo mobile V M. Se collo scalpello, che secondi sempre l' orlo I III della forma, si faccia strada al movimento che essa deve pigliare seguendo le fila, le quali si svolgono come prima dalla superficie degli assi, l' orlo I III progredirà nella superficie che va scoprendosi, e sarà appunto questa la cercata faccia inferiore.

Così potremo scoprire la superficie esterna convessa, adoperando la forma del triangolo mistilineo II I V L, come abbastanza chiaramente mostra la figura, dopo le cose dette circa l' opposta superficie concava interna.

§. 147. Dopo aver imitato rigorosamente colle operazioni meccaniche la generazione geometrica delle superficie, che dovevamo descrivere, veggasi un espediente per ottenere lo stesso effetto con approssimazione bastevole agli usi dell' arte.

In primo luogo si osservi che se gli archi IVpQ, VPV' siano divisi rispettivamente in p, e P così che la porzione IVp alla corrispondente V P abbia quella medesima ragione, che ha tutto l' arco IV Q a tutto l' arco V V', i due punti p, P, che in tal caso appelleremo omologhi, determinan una posizione della generatrice V M.

In secondo luogo i quattro punti IV V V' Q non possono, generalmente, giacere in un medesimo piano; ma si può intendere tirata una retta dal punto IV all' opposto V', e costituirla base comune a due triangoli rettilinei, uno dei quali abbia il vertice in Q, l' altro in V. Potremo dunque scoprire cotesti due triangoli rettilinei inscritti nella superficie concava IV Q V' V, avvertendo di non oltrepassare col taglio la base comune, ove congiungonsi.

In seguito dividiamo in parti eguali i due archi V V', IV Q, ed il numero delle parti sia eguale nell' uno e nell' altro. Descritte le corde che uniscono i punti delle divisioni, si avrà in ciascheduno dei due archi un poligono rettilineo inscritto.

Facciamo che ogni corda inscritta nell' arco IV Q sia base d' un triangolo rettilineo posto col vertice in V', ed ogni corda inscritta nell' arco V V' sia base d' un triangolo rettilineo posto col vertice in I V.

Non è d' uopo insegnare come si scoprano successivamente tutti questi triangoli, ed evidentemente apparisce 1° che tutti saranno inscritti nella superficie concava che cerchiamo, 2° che tanto minore intervallo resterà fra di essa e la superficie poliedrica composta da tutti quei triangoli, quanto maggiore sarà il loro numero. Per la qual cosa dipenderà dall'arbitrio, e dal discernimento dell'artista, appros-

simare quanto conviene la superficie poliedrica triangolare alla superficie concava del cuneo.

Ma per quanto siano moltiplicate le faccie triangolari inscritte, non toccandosi mai la diagonale IV V', rimarrà intorno ad essa un'eminenza, che deve esser tolta.

Immaginiamo una serie di triangoli rettilinei, che abbiano le loro basi nelle corde inscritte all' arco IV Q, ed il vertice in V. In tale ipotesi eseguiscasi l' operazione che sarebbe necessaria per iscoprire le faccie di tutti gli immaginati triangoli, se non fosse stato tagliato precedentemente il poliedro; cioè, supponendo uno di questi triangoli determinato dai tre punti IV *p* V, si farà che lo spigolo d' un regolo si appoggi perpetuamente al punto V, e scorra sopra la retta che unisce i due punti IV *p*. Tolta collo scalpello tutta la prominenza della pietra, che impedisce il detto scorrimento, e replicata l' operazione medesima per rispetto a ciascun lato inscritto nell' arco IV Q, sarà in gran parte scemata la prominenza che restava intorno alla diagonale IV V'.

Di nuovo ripetasi una simile operazione facendo vertice in Q, e prendendo per basi i lati inscritti all'arco VV'. Qualche altra prominenza si toglierà con questo terzo taglio, o piuttosto abrasione; e la superficie poliedrica risultante da tutte e tre le dette operazioni si accosterà quanto si voglia alla superficie curva continua che cerchiamo, dipendendo l'approssimazione dal numero delle piccole parti nelle quali si dividono gli archi IV Q, V V'. Ma col soccorso di queste divisioni si può maggiormente approssimare la superficie poliedrica, alla superficie curva continua, talchè la differenza non sia più sensibile. Imperciocchè quando lo spigolo d'un regolo sarà applicato a due punti omologhi delle divisioni fatte negli archi IV Q, V V', devesi ancora esattamente adattare alla superficie cercata; perchè, siccome abbiamo avvertito, quei due punti determinan una posizione della retta generatrice.

Per la qual cosa tolgasi qualunque menoma prominenza impedisce l' adattamento accennato del regolo in tutte le posizioni, che sono determinate dai punti omologhi nelle curve IV Q, V V'; i quali potendo essere tanti di numero quanto piaccia all' artefice, l' opera potrà ricevere con questo mezzo tutto il polimento che si giudicherà necessario.

Più agevolmente si riduce la faccia convessa opposta I II S I'. Imperciocchè osserviamo che divisi per mezzo gli archi I I', II S, e condotte le tangenti pei punti delle divisioni, saranno paralelle fra loro, e determineranno un piano tangente la superficie del cuneo lungo la retta che unisce i due punti di contatto. Sian divise nuovamente per mezzo le metà degli archi predetti, e condotte pei punti delle divisioni le rispettive tangenti; così prosegua la divisione indefinitamente, e la descrizione delle tangenti.

Otterremo in cotal modo due poligoni analoghi circoscritti alle due curve I I', II S, i quali coi loro lati omologhi paralelli determineranno una superficie poliedrica tangente la superficie che si vuol descrivere. Tagliando dunque la pietra secondo i piani costituenti quella superficie poliedrica, andremo tanto più vicini alla cercata superficie convessa, quanto sarà maggiore il numero delle faccie piane; e questo dipendendo dall' arbitrio nostro, potremo accostare la superficie poliedrica alla superficie curva in essa inscritta, fino a tanto che la differenza non sia più sensibile.

I punti omologhi delle due curve I I', II S determinan le posizioni della generatrice I II descrivente la faccia convessa, come i punti omologhi delle due curve IV Q, V V' determinan le posizioni della generatrice IV V descrivente l' opposta faccia concava. Sia dunque diviso ciascheduno dei quattro archi I I', II S, IV Q, V V' in egual numero di parti eguali, ed i punti omologhi delle divisioni saranno, a quattro, a quattro, successivamente costituiti in un medesimo piano, che determina una posizione del piano generatore. Adunque per ogni punto assegnabile sulla curva VV'

avremo determinata per mezzo dei punti omologhi la posizione del piano generatore, allorchè passa per quel punto, e per conseguenza la posizione ancora della forma I III V, o dell' altra II IV L. Perciò il taglio sarà diretto dall' orlo I III convesso della forma I III V, quando trattasi di scoprire la superficie concava inferiore, e dall' orlo convesso L IV della forma II L IV, quando si vuol ridurre la faccia superiore convessa.

Per quanto spetta alla divisione degli archi in parti eguali non vi è difficoltà alcuna. Imperciocchè non è mestieri dar di piglio alle formole algebriche, come se si trattasse la risoluzione di qualche problema puramente geometrico, e speculativo; ma basta applicare con diligenza un sottil regolo di materia flessibile all'arco da dividersi, e steso poscia il regolo in piano, eseguire sopra di esso le divisioni, le quali si trasporteranno sulla curva, nuovamente applicandovi colla medesima diligenza il regoletto, che porta notate esse divisioni.

§. 148. Abbiamo osservato rigorosamente il precetto che le superficie dividenti la volta in cunei siano fra loro normali. Ma non si deve credere vietato in pratica qualche arbitrio, quando coll' ammettere alcun poco di obbliquità, innocua per quanto spetta alla solidità dei cunei, e dell' edifizio da essi composto, si possa rendere l' esecuzione più semplice e spedita.

D' ordinario se le curve A B C ec., *abc* ec., Fig. 79, dalle quali dipende la forma della base su cui posa la volta, non sono circoli concentrici, una di esse è un' ellisse, o sono almeno curve simmetriche, cioè divisibili in quattro parti eguali e simili, poste intorno a due assi che si tagliano scambievolmente per mezzo, e ad angoli retti; la differenza degli assi non suol essere molto grande, ed oltre ciò la superficie superiore della volta non rimane esposta alla vista. Perciò i cunei da quella parte non è necessario che siano esattamente politi; ma la loro superficie può rimanere irregolare Fig. 79

e scabra. Supposte queste cose, io dico potersi fare la divisione longitudinale per mezzo di superficie coniche, in vece di quelle che sono generate dalle normali alla curva B3*b*.

Concepiamo descritta la curva che si percorre, a cagion d'esempio, dal punto 3, mentre la figura generatrice B3*be*4E percorre la solidità della volta. Quando la detta figura generatrice si trova nel piano verticale eretto sopra uno dei due assi spettanti alle curve ABC, ec., *abc* ec., si noti il punto ove la retta verticale insistente sul punto in cui si tagliano gli assi, taglia la normale 4 3, prolungata quanto è di bisogno. Similmente notisi l'intersecazione della predetta verticale colla stessa 43, quando la figura generatrice si trova nel piano verticale eretto sopra l'altr'asse delle due curve ABC, *abc*. In un punto di mezzo fra quelle due intersecazioni si costituisca il vertice d'una superficie conica, la quale abbia per base quella curva, che si descrive dal punto 3. Eseguendo la divisione con quella superficie conica, è vero che non avremo perpendicolari ad essa nè la superficie interna della volta, nè i piani delle divisioni trasversali; ma quando gli assi differiscono poco fra loro, non è di gran peso il difetto che proviene dall' obbliquità delle faccie, che racchiudono i cunei; ed all' opposto conviene assai valutare la facilità che si procura nelle costruzioni, per aver cangiato in superficie coniche quelle superficie non possibili a descriversi con movimento continuo, altrimenti che per mezzo dell' evoluta delle curve A B C, *a b c*, e della corrispondente superficie degli assi.

CAPITOLO X.

Costruzione della volta elicoidica, altrimenti detta a chiocciola.

Fig. 79 §. 149. Nelle due curve paralelle ABC ec., *abc* Fig. 79, siano projettate le superficie interne delle due pareti che debbono sostenere la volta, e la retta B*b* sia normale comune ad

ad esse. Sarà pure normale alle due superficie cilindriche, rette, insistenti e projettate sulle due medesime curve. Immaginiamo che la B *b*, sempre normale ad ambedue quelle superficie, scorra fra di esse, e vi descriva sopra co' suoi estremi B, *b* due eliche fra loro paralelle, §. 59, P.I. Queste determineranno il principio, o le imposte della volta. Immaginiamo pei punti B, *b* condotte due tangenti alle rispettive eliche, le quali essendo paralelle per ipotesi, saranno paralelle ancora le due tangenti loro; e perciò queste costituiranno un piano. Sopra di esso concepiamo insistere un piano normale condotto per la B *b*, sul quale sia descritta la figura B 3 *b e* 4 E, dove la curva B 3 *b* rappresenta la generatrice della superficie interna: E 4 *e* la generatrice dell' esterna: B E, *b e* i prolungamenti della B *b*, ciascun de' quali eguaglia la grossezza della volta nelle sue imposte. Se la figura B 3 *b e* 4 E segua il già descritto movimento della retta B *b*, senza che il suo piano cessi d' essere normale a quello che in ogni posizione della B *b* è determinato delle due tangenti delle eliche descritte dai punti B, *b*, la detta figura percorrerà lo spazio occupato dalla solidità della volta, mentre la curva B 3 *b* descrive la superficie interna, l'altra E 4 *e* descrive l' esterna.

Nel movimento medesimo, ogni punto assegnabile nella curva B 3 *b* descrive un' elica paralella a quelle che si descrivono dai punti B, *b*; e quindi in ogni posizione della figura generatrice, le tangenti condotte da quali punti si voglia della curva B 3 *b* alle rispettive eliche da essi descritte, sono tutte fra loro paralelle, cioè normali al piano generatore. Dunque la superficie descritta dalla curva B 3 *b* è perpendicolare al piano di essa curva in ogni sua posizione; e perciò le divisioni trasversali della volta saranno opportunamente dirette da quel medesimo piano.

Immaginiamo ora una retta 1 2, normale in 1 alla curva B3*b*. Cotesta retta, seguendo il movimento della generatrice, descriverà una superficie normale al piano della stessa generatrice B 3 *b*, ed alla superficie interna da essa gene-

rata. Dunque la superficie descritta dalla normale 1 2, e tutte le analoghe, soddisfanno pienamente alle condizioni che si dimandano nelle divisioni longitudinali.

§. 150. Ogni cuneo sarà compreso da 6 faccie; due piane eguali, e simili a quella parte della figura B3*be*4E, che percorre lo spazio occupato dal cuneo: tale p. es. sarà il quadrilatero 1 2 4 3; due spettanti alla classe delle superficie, che noi chiameremo di rivoluzione, §. 48, P. I, e sono quelle descritte dalle normali 1 2, 3 4; due finalmente che possono chiamarsi elicoidiche, e sono descritte dagli archi 1 3, 2 4.

Quando vogliamo descrivere l' erta d'una scala a chiocciola, s' adopera una retta per generatrice in luogo della curva B 3 *b*; e quando la scala dev'essere accompagnata dalla volta che la ricopre, s' adopera una curva nel modo rappresentato dalla figura 79, e descritto nella corrispondente esposizione.

Fig. 81 Sia *a b d c c' d' b' a'* projezione orizzontale d' un cuneo che si determini dal movimento del quadrilatero 1 2 4 3, Fig. 79 i due quadrilateri mistilinei *a b d c*, *a' b' d' c'* rappresentino le due faccie piane; *a' a c c'* la faccia elicoidica superiore, o esterna; *b b' d' d* la inferiore e interna; *a a' b' b*, *c c' d' d* rappresentino i due fianchi, o le due faccie generate dalle *ab*, *cd*, normali alla generatrice della superficie interna ne' punti 1, 3, Fig. 79. Facciamo ancora la B D projezione della retta orizzontale sottesa alla curva generatrice della superficie interna, che suppongasi nel piano della faccia rappresentata in *a b d c*; B' D' sia projezione della retta medesima, quando la curva generatrice si trova nel piano della faccia rappresentata in *a' b' c' d'*.

Conduciamo per *a* una retta *m o* paralella alla B D, e per *d'* una retta *n p* paralella alla B'D'. Siano poi terminate le *mo*, *np* nei punti ove incontrano i prolungamenti degli archi *c c'*, *b b'*. Pel punto projettato in *a'*, che sarà più elevato di tutti, concepiamo condotto un piano orizzontale, ed un altro similmente orizzontale pel punto projettato in

d, che sarà l' infimo. Fingiamo ancora che la projezione orizzontale del cuneo, rappresentata nella Fig. 81, sia nel detto piano ultimamente indicato. Sulla base mistilinea *mnpo* suppongo eretto un prisma verticale, intercetto dai due piani testè definiti. Cotal prisma evidentemente conterrà il cuneo che vogliamo considerare. Adunque un poliedro contenente il cuneo deve prima esser capace del prisma predetto; e circa la riduzione di esso prisma non giudico neccessario entrare in minute dichiarazioni, alle quali può supplire del proprio chiunque vi presti mediocremente attenzione.

§. 151. Ciò posto suppongo già ridotto il prisma, ed alla sua projezione orizzontale *m n p o* aggiungo la verticale M' N' N P P' O' O. La retta M' O' P' N' rappresenterà il piano orizzontale superiore, che abbiamo supposto condursi pel punto rappresentato in *a'*; l' altra retta M O P N rappresenterà il piano inferiore, ov' è descritta la projezione orizzontale, e dove è il punto rappresentato in *d*. O O' P' P rappresenterà verticalmente la superficie interna del prisma, che orizzontalmente è projettata nell' arco *o b p*. M' N' N M è projezione verticale della superficie esterna, che orizzontalmente è projettata nell' arco *m c n* ec.

Nella superficie interna deve giacere lo spigolo del cuneo che è projettato orizzontalmente in *b b'*; e perciò incomincio a notare in quella superficie i punti corrispondenti agli estremi di cotesto spigolo, i quali verticalmente saranno projettati in β, β'. Distendo la curva *b b'* nella retta 1 2; costituisco normale ad essa la 1 4, eguale all' altezza del punto rappresentato dalle projezioni $\beta - b$; e condotta la 4 5 paralella, ed eguale alla 1 2, pongo la retta 5 2 3 eguale all' altezza del punto corrispondente alle projezioni $b' - \beta'$, e chiudo la figura 1 4 5 3. Sarà la retta 2 3 eguale alla differenza delle altezze competenti ai due punti mentovati; e perciò 1 3 dev' essere quella retta in cui si stende l' arco elicoidico projettato in *b b'* mentre l' arco stesso *b b'* stendesi nella retta 1 2, P. I, §. 59. Per la qual

cosa taglieremo in cartone la figura 1 4 5 3, e adattandola su la superficie interna del prisma in modo che la retta 4 5 si pieghi, e si adatti alla base della superficie medesima, ed il punto 1 cada sul punto già notato, e corrispondente alle projezioni b—β, segneremo secondo la 1 3, che si adatterà anch' essa alla superficie del prisma, il vestigio dell' arco elicoidico projettato in $b\,b'$ orizzontalmente, al quale corrisponderà la projezione verticale $\beta\,\beta'$.

Similmente descriveremo nella superficie esterna il vestigio dell' arco elicoidico projettato orizzontalmente in $c\,c'$, e verticalmente in $\gamma\,\gamma'$.

Ora nella faccia piana del prisma che è projettata sulla retta $m\,o$ si noti il luogo di quel punto che è projettato orizzontalmente in a, ciò che eseguiremo facilmente portando sullo spigolo del prisma projettato verticalmente in M M' l' altezza M k del punto corrispondente alla projezione orizzontale a, indi pel punto indicato in k conducendo nella faccia piana del prisma una retta orizzontale, eguale in lunghezza alla retta $m\,a$. Le sue projezioni saranno la stessa $m\,a$ nel piano orizzontale: la $k\,\alpha$ nel verticale; e l' estremo projettato in a—α determinerà il punto cercato.

Per quel punto medesimo immaginiamo condotta dentro alla solidità del prisma una curva paralella a quelle che sono projettate in $c\,c'$, $d\,d'$ ec. sul piano orizzontale; e le projezioni di quella curva siano $a\,a'$—$\alpha\,\alpha'$. È chiaro ch' essa determinerà nel solido del prisma il luogo d' uno spigolo. Pel punto rappresentato in α conduciamo una retta verticale $\alpha\,\alpha''$, che incontri nel punto rappresentato in α'' quel piano orizzontale projettato in M' P'. In esso piano descrivasi un arco eguale, simile, e paralello all' arco $a\,a'$; ed avrà la sua projezione verticale in $\alpha'\,\alpha''$. Se la retta verticale $\alpha\,\alpha''$ scorra col punto α'' sull' arco testè descritto, mantenendosi sempre verticale, e scemando continuamente la propria lunghezza, con la medesima proporzione con cui scema la parte dell' arco predetto, che rima-

ne fra la retta mobile, ed il punto rappresentato in α', l'estremo α di quella retta mobile, avvicinandosi al piano orizzontale M' P', ed al punto rappresentato in α', descriverà l'arco elicoidico rappresentato dalle projezioni $a\,a' - \alpha\,\alpha'$.

Il movimento sopraddescritto della retta $\alpha\,\alpha''$ può con molta facilità essere imitato col solito meccanismo d'un regolo mobile, verticale, sul cui spigolo dirigasi il taglio che deve scoprire il triangolo mistilineo rappresentato verticalmente in $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$, ed orizzontalmente nell'arco $a\,a'$. Scopriremo poi collo stesso metodo ancora il triangolo rappresentato verticalmente dalla projezione $\delta\,\delta'\,\delta''$, ed orizzontalmente dall'arco $d\,d'$; onde verrà determinato nel prisma il luogo dello spigolo corrispondente alle projezioni $d\,d' - \delta\,\delta'$.

Per tanto determinati i quattro spigoli elicoidici corrispondenti alle projezioni verticali $\alpha\,\alpha'$, $\beta\,\beta'$, $\gamma\,\gamma'$, $\delta\,\delta'$, questi determineranno le sei faccie del cuneo. E prima le due piane sono manifestamente determinate dagli estremi degli archi stessi. Per ridurre le altre quattro, si può ricorrere, volendo, all'evoluta delle curve A B C ec., $a\,b\,c$ ec., Fig. 79, ed alla superficie degli assi, Fig. 80, seguitando i medesimi principj, ed il metodo, che furono spiegati nel §. 146; ma più facilmente si accomoderà alla pratica il metodo approssimativo che accennai nel susseguente articolo. In fatti dividiamo in un numero eguale di eguali parti i due archi rappresentati dalle projezioni $\alpha\,\alpha'$, $\beta\,\beta'$, ed inscrivasi a ciascheduno di essi il poligono rettilineo determinato dalle dette divisioni. Sopra ciascheduno dei due poligoni costituiremo un sistema di triangoli rettilinei, che abbiano i loro vertici negli estremi de' lati componenti l'altro poligono. Scoperti nel modo solito questi triangoli, si otterrà una superficie poliedrica, triangolare, inscritta nella superficie concava che vogliamo descrivere, e la differenza fra l'una e l'altra potrà diminuirsi quanto si voglia, dipendendo dalla moltitudine dei triangoli, che non è definita. Ma dopo aver eseguita la riduzione dell'accennata superficie poliedrica, faremo scor-

rere un regolo per tutte le posizioni della generatrice, che sono determinate dai punti omologhi, ne' quali abbiam divise le due curve, togliendo diligentemente tutte le prominenze che impediscono l' esatto adattamento del regolo alla superficie su cui posa, avremo compiuta l' operazione, per cui, siccome abbiamo precedentemente osservato, si ottiene tutta l' esattezza che può in pratica desiderarsi.

Se per la faccia concava interna abbiamo adoperato un sistema di triangoli inscritti ad essa, per la faccia opposta convessa adopreremo un sistema di quadrilateri circoscritti, seguendo pure in questa parte il metodo del §. 147, giacchè il presente argomento è affatto analogo a quello; nè per quanto risguarda la riduzione delle due faccie elicoidiche, interna ed esterna, stimo doversi aggiugnere cosa alcuna a quel che fu detto nel citato luogo, in proposito del cuneo spettante alla volta anulare; imperocchè troppo è manifesta la rassomiglianza di quello col cuneo della chiocciola.

§. 152. Quando la volta che si deve costruire, e per conseguenza ancora i cunei de' quali è composta, non abbiano uniforme grossezza in tutta la loro estensione, siccome avviene se la solidità di essa volta sia terminata matematicamente da due tali superficie, interna ed esterna, che tutte le parti debbano trovarsi equilibrate, ciascun cuneo si potrà considerare prima di grossezza uniforme; e poichè saranno state ridotte tutte le sue faccie, trattone l' esterna, a questa si darà quella forma che le conviene, regolando l' operazione sui precetti, e sugli esempj che abbiamo di sopra mostrati.

FINE.

APPENDICE

DELLA PARTE I.

Se le cose dette nel Cap. VII. P. I. intorno alle evolute delle curve di doppia curvatura, cadranno sott' occhio di taluno che si diletti di raffrontare i metodi grafici con quelli dell' algebra, non gli sarà discaro ch' io declini dal mio proposito, (*) ritornando sull' argomento dei §§ 160, 161, per aver occasione di esporre una dimostrazione algebrica del Sig. Cavaliere Caccianino, Colonello del Genio, e Direttore della R. Scuola militare di Modena. (1)

Prima di riferire il testo originale, con cui piacque al prelodato Autore di fregiare questo mio libro, raccoglierò in fedele transunto le parole del Sig. La Grange relative al detto argomento.

Théorie de Fonct. Analyt. N.° 141.

„ Supponghiamo che si dimandi il circolo osculatore d'una
„ curva di doppia curvatura.

„ Per ottenere nel modo più semplice le equazioni ge-
„ nerali d' un circolo descritto sopra qualsivoglia piano,
„ supporremo che nasca per l' intersecazione d' una su-
„ perficie sferica, e d' un piano condotto pel centro di
„ essa.

„ Allora il centro ed il raggio della sfera saranno co-
„ muni al circolo, il cui piano sarà lo stesso piano se-
„ cante.

„ L' equazione generale d' una sfera riferita alle tre
„ coordinate p, q, r è

(*) Prefazione pag. VI. lin. ultima.

„ $(p-a)^2 + (q-b)^2 + (r-c)^2 = d^2$,
„ ove a , b , c sono le coordinate del centro , e d è il se-
„ midiametro.

„ L' equazione d' un piano riferito alle medesime coor-
„ dinate , e condotto pel punto corrispondente alle coor-
„ dinate a , b , c , è in generale

„ $(p-a) + m(q-b) + n(r-c) = 0$;

„ essendo m , n due costanti arbitrarie , che determinan
„ l' inclinazione del piano rispetto ai piani fissi delle coor-
„ dinate.

„ Il sistema di coteste due equazioni rappresenterà
„ dunque un circolo , il cui raggio sarà d , il cui centro
„ sarà determinato dalle coordinate a , b , c , ed il cui pia-
„ no dipenderà dalle due quantità m , n .

„ Se dunque nelle due predette equazioni sostituiscansi
„ alle quantità p , q , r le rispettive x , y , z , e si derivino
„ le equazioni prime, e seconde , ne verranno le sei equa-
„ zioni seguenti .

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d^2 \quad . \; . \; . \; 1^a$$
$$(x-a) + m(y-b) + n(z-c) = 0 \quad . \; . \; . \; 2^a$$
$$(x-a) + y'(y-b) + z'(z-c) = 0 \quad . \; . \; . \; 3^a$$
$$1 + my' + nz' = 0 \quad . \; . \; . \; 4^a$$
$$1 + y'^2 + z'^2 + y''(y-b) + z''(z-c) = 0 \quad . \; . \; . \; 5^a$$
$$my'' + nz'' = 0 \quad . \; . \; . \; 6^a$$

„ Delle quali le prime quattro contengono le condizioni
„ necessarie perchè il circolo abbia un contatto di prim'
„ ordine con qualunque curva di doppia curvatura , la qua-
„ le abbia le x , y , z per sue coordinate : y , z essendo da-
„ te in funzioni di x ; e se aggiungansi le due ultime e-
„ quazioni , vi avranno ancora le condizioni necessarie per
„ un contatto di second' ordine , cioè a dire perchè il cir-
„ colo sia osculatore della curva .

. . . . . .

. . . . . .

„ La quantità d sarà il raggio osculatore della curva pro-

„ posta, e le quantità a, b, c saranno le coordinate della
„ curva che contiene i centri di tutti i circoli osculatori.
„ Ma questa curva, non sarà perciò un'evoluta, come nel-
„ le curve di semplice curvatura.

. . . . . .

. . . . . .

„ N.° 142. Ripigliamo i valori di a, b, c dedotti dalle tre
„ prime equazioni; avremo

$$a = x - \frac{(ny' - mz')\,d}{R}$$

$$b = y + \frac{(n - z')\,d}{R}$$

$$c = z - \frac{(m - y')\,d}{R}\ ,$$

„ essendo $R = \sqrt{(ny' - mz')^2 + (n - z')^2 + (m - y')^2}$

„ Queste espressioni, considerando x, y, z, y', z', come pu-
„ re m, n costanti, e solamente la quantità d variabile,
„ rappresentano le coordinate della retta nella quale giace il
„ raggio osculatore. Ma tenendo per variabili tutte queste
„ quantità, e come date per x le m, n, d, giacchè y, z si
„ risguardano come date per x, le medesime espressioni
„ rappresentano allora le coordinate della curva de' centri.

„ Ora perchè la retta divenga tangente della curva, è
„ d'uopo che nell'uno e nell'altro caso si ottengano va-
„ lori medesimi di $\frac{b'}{a'}$, e di $\frac{c'}{a'}$, considerando b, c come
„ funzioni di a, ovvero in generale a, b, c come funzioni
„ d'un'altra variabile qualunque.

„ Perciò i valori di $\frac{a'}{d'}$, $\frac{b'}{d'}$, $\frac{c'}{d'}$ riusciranno i medesi-
„ mi, e facendo variare le sole quantità a, b, c, d, e fa-
„ cendo variare insieme ancora le x, y, z, m, n. Per con-
„ seguenza converrà che le equazioni, per le quali sono
„ determinati questi valori, si avverino egualmente in am-
„ be le ipotesi.

„ Pertanto se consideriamo le equazioni, le quali servi-

„ rono a determinare le quantità a, b, c, d, m, n in $x, y,$
„ y', y'', e risguardiamo coteste quantità tutte come variabili
„ nel medesimo tempo, egli è chiaro che le due equazioni

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d^2$$
$$(x-a) + y'(y-b) + z'(z-c) = 0$$

„ indurranno ancora alla seguente

$$„ - a'(x-a) - b'(y-b) - c'(z-c) = dd' ;$$

„ la quale altro non è se non che la prima derivata della
„ 1ª, quando suppongansi variabili le sole a, b, c, d.

„ Similmente le due equazioni

$$(x-a) + y'(y-b) + z'(z-c) = 0$$
$$1 + y'^2 + z'^2 + y''(y-b) + z''(z-c) = 0$$

„ indurranno alla seguente

$$a' + y'b' + z'c' = 0,$$

„ che è parimenti la prima derivata della 3ª, quando si
„ tengano per variabili solamente le a, b, c. Le due tro-
„ vate equazioni hanno dunque la condizione richiesta;
„ ma siccome non bastano a determinare le tre quantità
„ $\frac{a'}{d'}, \frac{b'}{d'}, \frac{c'}{d'}$, converrà trovare nel modo stesso una terza
„ equazione, la quale contenga le funzioni prime a', b', c'.
„ Ora le due precedenti essendo state dedotte dall' equa-
„ zione della sfera, sarà d'uopo ricavare la terza dall'equa-
„ zione del piano

$$(x-a) + m(y-b) + n(z-c) = 0;$$

„ la quale, facendo variar tutto, e tenendo conto dell'
„ equazione

$$1 + my' + nz' = 0, \text{ darà}$$
$$-a' - mb' - nc' + m'(y-b) + n'(z-c) = 0,$$

„ ch' egli è chiaro esser la prima derivata della preceden-
„ te, ove suppongansi variabili ad un tempo le a, b, c, m, n.
„ Per conseguenza quest'equazione non avrà la condizione
„ richiesta, se pur quella parte che dipende dal variare
„ delle quantità m, n non s' annulli, cioè a dire se non sia

$$m'(y-b) + n'(z-c) = 0.$$

„ Se questa condizione avrà luogo, allora l' equazione ri-
„ manente

$$a' + m\,b' + n\,c' = 0$$

„ combinata con le due equazioni che abbiamo trovate so-
„ pra, darà i valori di $\frac{a'}{d'}$, $\frac{b'}{d'}$, $\frac{c'}{d'}$, che saranno gli stes-
„ si, o facciansi variare le sole quantità a, b, c, d, o con
„ esse ancora le x, y, z, m, n. Laonde la retta in cui
„ giace il raggio osculatore diverrà tangente della curva
„ dei centri; e quindi esso raggio sarà pure tangente la
„ medesima curva, perchè in essa è terminato.

. . . . . .

. . . . . .

„ N.° 143. La condizione $m'(y-b)+n'(z-c)=0$, che
„ abbiamo testè assegnata perchè la curva abbia un' evoluta,
„ si avvera manifestamente quando m, ed n sono costanti;
„ ed in tal caso la curva sarà tutta in un piano determinato
„ per esse costanti. Se queste quantità non sono costanti,
„ determineranno il piano tangente della curva; e quando
„ la precedente equazione avrà luogo, i raggi osculatori
„ formeranno una curva sviluppabile, ec.

Testo del Sig. Cavaliere Caccianino.

„ Accomodata la mia immaginazione al principio degli
„ infinitesimi, o piuttosto al buon uso, che si può fare dei
„ rapporti fra gli aumenti delle quantità variabili, che il
„ Calcolo lascia sussistere anche nel punto, in cui questi
„ si suppongono svanire, se ho sempre riputato esatti tutti
„ i ragionamenti, che da quel principio ben maneggiato fe-
„ cero a' sommi Matematici scuoprire le più recondite verità
„ col più rapido, e prodigioso avanzamento della Scienza;
„ sento altresì che il principio de' limiti nelle dimostrazioni
„ sintetiche di quelle verità trattato colla esatta conservazio-
„ ne de' Caratteri, che questi limiti costituiscono, è di un
„ concetto meno astratto; cosicchè potendosi ammettere,

„ che quasi tutto il suo processo cada pressocchè sotto il giu-
„ dizio de' sensi, esso conduce più facilmente l' immagina-
„ zione, se non nelle cose d' indagine in quelle almeno,
„ che già ritrovate voglionsi ad altri insegnare.

„ Siccome però per le Analitiche dimostrazioni i più
„ celebri Matematici danno giustamente il vanto della mag-
„ giore evidenza al principio assunto dall'Immortale Autore
„ della Teoria delle Funzioni Analitiche; così penso che non
„ saranno mai riputati inutili i tentativi di assoggettare a
„ questo stesso principio le verità, che col primo si fossero
„ ritrovate, e col secondo appoggiate a meno astratte di-
„ mostrazioni.

„ Pertanto avendo il Signor Lagrange ai §§. 141. e 142.
„ della citata Teoria lasciata indecisa la questione se la
„ Curva de' centri de' circoli osculatori possa mai essere evo-
„ luta d' una proposta di doppia curvatura, fu per questo,
„ ch' io feci conoscere come la simultaneità di queste due
„ proprietà fosse impossibile dimostrando, che l'equazione di
„ condizione giustamente assegnata dal Lagrange non può aver
„ luogo, che nelle curve piane, e provando colla Teoria del-
„ le Funzioni Analitiche lo stesso assunto che il Signor Monge
„ aveva ricavato dal principio degli infinitesimi col seguente

TEOREMA

„ Per una Curva qualunque a doppia curvatura è impos-
„ sibile, che la linea de' centri de' suoi circoli osculatori
„ goda della proprietà d' essere evoluta della curva mede-
„ sima.

„ Scriviamo le sei equazioni di condizione assegnate dal
„ Sig. Lagrange al §. 141. della Teoria delle Funzioni Anali-
„ tiche per determinare la curva de' centri di tutti i circo-
„ li osculatori.

1.ª . . . $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d^2$

2.ª . . . $x-a+m(y-b)+n(z-c)=0$

3.ª . . . $x - a + y'(y - b) + z'(z - c) = 0$
4.ª . . . $1 + my' + nz' = 0$
5.ª . . . $1 + y'^2 + z'^2 + y''(y - b) + z''(z - c) = 0$
6.ª . . . $my'' + nz'' = 0$.

„ Aggiungiamoci le quattro stabilite dallo stesso Geome-
„ tra, affinchè la Curva de' centri possa essere un' evoluta.
7.ª . . . $-a'(x - a) - b'(y - b) - c'(z - c) = dd'$
8.ª . . . $a' + y'b' + z'c' = 0$
9.ª . . . $a' + mb' + nc' = 0$
10.ª . . . $m'(y - b) + n'(z - c) = 0$.

„ Siccome le equazioni 4.ª e 6.ª bastano per l' elimi-
„ nazione di m, e di n, e di queste appunto servesi La-
„ grange per trovare

$$m = \frac{z''}{z'y'' - y'z''}, \qquad n = \frac{-y''}{z'y'' - y'z''};$$

„ Così le prime sei equazioni si ridurranno alle quattro se-
„ guenti
1.ª . . . $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = d^2$
2.ª . . . $x - a + \frac{z''}{z'y'' - y'z''}(y - b) - \frac{y''}{z'y'' - y'z''}(z - c) = 0$
3.ª . . . $x - a + y'(y - b) + z'(z - c) = 0$
4.ª . . . $1 + y'^2 + z'^2 + y''(y - b) + z''(z - c) = 0$.

„ I valori poi trovati di m, n determinano quelli di m', n',
„ avendosi

$$m' = f'\left(\frac{z''}{z'y'' - y'z''}\right), \; n' = -f'\left(\frac{y''}{z'y'' - y'z''}\right); \text{ cioè}$$

$$m' = \frac{z'''(z'y'' - y'z'') - z''(z''y'' + y'''z' - y''z'' - y'z''')}{(z'y'' - y'z'')^2}$$

$$n' = \frac{-y'''(z'y'' - y'z'') + y''(z''y'' + y'''z' - y''z'' - y'z''')}{(z'y'' - y'z'')^2},$$

„ ossia $m' = \frac{z'y''z''' - y'z''z''' - z'z''y''' + y'z''z'''}{(z'y'' - y'z'')^2}$

$$n' = \frac{y'z''y''' - z'y''y''' + z'y''y''' - y'y''z'''}{(z'y'' - y'z'')^2}.$$

„ D' onde si ricava

$\frac{m'}{n'} = \frac{z'y''z''' - z'z''y'''}{y'z''y''' - y'y''z'''} = \frac{z'(y''z''' - z''y''')}{y'(z''y''' - y''z''')}$; che si riduce ad $\frac{m'}{n'} = -\frac{z'}{y'}$.

„ Ma dall' equazione 10.ª si ha $\frac{m'}{n'} = -\frac{z-c}{y-b}$;

„ dunque ancora $\frac{z'}{y'} = \frac{z-c}{y-b}$, ovvero $z - c - \frac{z'}{y'}(y-b) = 0$.

„ Tutte le prime dieci equazioni pertanto si ridurran-
„ no alle otto seguenti

1.ª . . . $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d^2$

2.ª . . . $x - a + \frac{z''}{z'y'' - y'z''}(y-b) - \frac{y''}{z'y'' - y'z''}(z-c) = 0$

3.ª . . . $x - a + y'(y-b) + z'(z-c) = 0$

4.ª . . . $1 + y'^2 + z'^2 + y''(y-b) + z''(z-c) = 0$

5.ª . . . $-a'(x-a) - b'(y-b) - c'(z-c) = dd'$

6.ª . . . $a' + y'b' + z'c' = 0$

7.ª . . . $a' + \frac{z''}{z'y'' - y'z''}b' - \frac{y''}{z'y'' - y'z''}c' = 0$

8.ª . . . $z - c - \frac{z'}{y'}(y-b) = 0$.

„ Le quantità da determinarsi per mezzo di queste
„ otto equazioni sono le seguenti sette

$$a, b, c, d, \frac{a'}{d'}, \frac{b'}{d'}, \frac{c'}{d'};$$

„ d' onde si rileva che una qualunque delle otto equazioni
„ deve non essere in contraddizione con ciascuna delle altre
„ sette.

„ Ora la prima, la seconda, la terza, e l' ottava non
„ contenendo che le quattro incognite a, b, c, d, devono
„ bastare a determinarle, quando non esista contraddizione
„ rispettivamente a queste quattro equazioni. Potremo adun-
„ que riconoscere se gl' indicati quattro valori siano possibili
„ trattando le citate quattro equazioni nel seguente modo.

„ Dall' ottava ricavo $y - b = \frac{y'}{z'}(z-c)$, e ponendo que-

„ sto

„ sto valore di $y - b$ nelle prime tre ottengo

1.ª . . . $(x-a)^2 + \left(\frac{y'^2+z'^2}{z'^2}\right)(z-c)^2 = d^2$

2.ª . . . $x - a + \frac{(y'z''-y''z')(z-c)}{z'(z'y''-y'z'')} = 0$

3.ª . . . $x - a + \left(\frac{y'^2+z'^2}{z'}\right)(z-c) = 0$

„ La seconda si riduce ad $x - a - \frac{z-c}{z'} = 0$, onde „ $z - c = z'(x-a)$. Sostituito pertanto questo valore di „ $z - c$ nella prima, e nella terza abbiamo

1.ª . . . $(x-a)^2 + (y'^2 + z'^2)(x-a)^2 = d$

3.ª . . . $x - a + (y'^2 + z'^2)(x-a) = 0$; ossia

$$(x-a)^2(1 + y'^2 + z'^2) = d^2$$

$(x-a)(1 + y'^2 + z'^2) = 0$; e moltiplicando quest'ultima per $x - a$ si ha ancora $(x-a)^2(1 + y'^2 + z'^2) = 0$.

„ Dovrebbe adunque essere ancora $d^2 = 0$, e $d = 0$.

„ La qual conclusione desunta dal calcolo dimostra, che „ nessuna Curva (poichè in tutte le Curve il raggio d del „ circolo osculatore è necessariamente quantità finita) a „ doppia curvatura può avere la linea de' centri, che goda „ anche della proprietà di essere una delle sue evolute. „ C. D. D.

Scolio

„ Delle suddette prime dieci equazioni prese tutte quel- „ le, che sussistono nel caso, che la curva sia piana, e con- „ venientemente modificatele, si dimostra, che per tutte le „ curve piane la linea de' centri de' suoi circoli osculatori „ è sempre evoluta della curva medesima.

„ Siccome il piano de' circoli osculatori in questo caso „ è sempre quello stesso della curva; così la seconda delle „ prime dieci equazioni diviene inutile, e per conseguenza „ non hanno più luogo la quarta, la sesta, la nona, e la „ decima. La prima si riferisce al circolo, e non più alla „ sfera; e da questa ne derivano la terza, la quinta, la set-

„ tima, e l' ottava delle seguenti forme in numero di cinque.

1.ª . . . $(x-a)^2+(y-b)^2=d^2$

2.ª . . . $x-a+y'(y-b)=0$

3.ª . . . $1+y'^2+y''(y-b)=0$

4.ª . . . $-a'(x-a)-b'(y-b)=dd'$

5.ª . . . $a'+y'b'=0$.

„ Queste equazioni comprendono le condizioni tutte del-
„ la curva de' centri, e dell' evoluta. Le quantità da de-
„ terminarsi sono le cinque a, b, d, $\frac{a'}{d'}$, $\frac{b'}{d'}$.

„ Dalla quarta si ha

$\frac{a'}{d'}(x-a)+\frac{b'}{d'}(y-b)=-d$. Onde

$\left(\frac{a'}{d'}(x-a)+\frac{b'}{d'}(y-b)\right)^2=d^2$, uguale alla prima,

„ cioè $\left[\frac{a'}{d'}(x-a)+\frac{b'}{d'}(y-b)\right]^2=(x-a)^2+(y-b)^2$;

„ Ma dalla seconda abbiamo

„ (A) . . . $x-a=-y'(y-b)$; Dunque

$\left(-\frac{a'}{d'}y'+\frac{b'}{d'}\right)^2(y-b)^2=(1+y'^2)(y-b)^2$, cioè

$\left(-\frac{a'}{d'}y'+\frac{b'}{d'}\right)^2=1+y'^2$.

„ Dalla quinta si ha $b'y'=-a'$, ossia $\frac{b'}{d'}y'=-\frac{a'}{d'}$;

„ Dunque $\left(\frac{b'}{d'}y'^2+\frac{b'}{d'}\right)^2$, ossia

$\frac{b'^2}{d'^2}(1+y'^2)^2=1+y'^2$, e da questa si ricava

$\frac{b'}{d'}=\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)}}$.

„ Dalla terza poi abbiamo $y-b=-\frac{1+y'^2}{y''}$, onde

„ la (A) diventa $x-a=\frac{y'}{y''}(1+y'^2)$.

„ Dunque sostituiti questi valori di $y-b$, e di $x-a$ nel-
„ la prima otterremo

„ $\frac{y'^2}{y''^2}(1+y'^2)^2+\frac{1}{y''^2}(1+y'^2)^2=d^2$, ossia

„ $d^2=\frac{1+y'^2}{y''^2}(1+y'^2)^2$, e quindi

„ $d=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, la quale è appunto l' equazione del raggio

„ del circolo osculatore per tutte le curve piane .

È ordinata a dimostrare per altra via il precedente Teorema, quella risposta già da me accennata nel § 161. P. I. Perciò stimo che non si debba tralasciare nella presente Appendice. Dico dunque che l'equazione condizionale (2)

$$m'(y-b)+n'(z-c)=0$$

mai non si avvera, quando la curva proposta ha doppia curvatura .

Imperciocchè, stante quest' ipotesi, la posizione del piano tangenziale deve variare da punto a punto . Laonde, nell' equazione del piano tangenziale spettante ad un qualunque punto della curva, del qual siano x, y, z le coordinate, i coefficienti m, n dovranno essere funzioni di x: considerando pure y, z funzioni della stessa x.

Ciò posto, non potrà essere in generale $m'=0$, $n'=0$. Oltre di questo si osservi che i piani coordinati potranno essere costituiti in maniera che il raggio osculatore corrispondente al supposto punto riesca paralello ad uno di essi, per cagion d' esempio a quello delle x, z, senza che sia paralello a niuno degli altri due .

Secondo queste condizioni, avremo dunque, relativamente al detto punto, $y-b=0$, giacchè esso punto, ed il centro d' osculo corrispondente si trovano ad eguale distanza dal piano delle x, z; e non sarà nel tempo stesso $z-c=0$.

Nondimeno dovendo sussistere l' equazione condizionale $m'(y-b)+n'(z-c)=0$, ne seguirà necessariamente l' altra

$n'(z-c)=0$, senza che sia nè $n'=0$, nè $(z-c)=0$; ciò che è impossibile.

Adunque la curva de' centri d' osculo d' una curva di doppia curvatura non sarà mai sua evoluta.

Nè debbon fare obbiezione quelle parole del N° 155. Théorie des Fonct. pag. 183, con le quali sembra essere indicato un esempio di curve non piane che abbiano i centri d' osculo in una loro evoluta.

Dopo aver parlato delle linee di massima, e di menoma curvatura, che passano per ogni punto di qualunque superficie curva, il Sig. La Grange accennando la curva contenente i centri delle sfere osculatrici, che toccano la data superficie lungo l' una, o l' altra delle due linee predette, si esprime in questi termini.

„ Ainsi cette courbe sera la véritable développée des „ lignes de plus grande et de moindre courbure, et réci- „ proquement il n'y aura sur une surface quelconque que „ ces lignes, qui puissent avoir une développée formée par „ le rayons de courbure.

Egli è ben facile confondere sotto questa denominazione „ rayons de courbure „ i raggi delle sfere osculatrici, che sono i raggi di curvatura della superficie, coi raggi osculatori della linea sulla quale è misurata cotesta curvatura. Ma dalle cose dimostrate nel § 160. P. I, ed in quest' Appendice, si rende certo che i raggi di curvatura della superficie, cioè i raggi delle sfere osculatrici, ed i loro centri, son necessariamente diversi dai raggi e dai centri osculatori delle curve, sopra le quali misurasi la detta curvatura della superficie.

Per la qual cosa ciascheduna delle due linee contenenti i centri delle sfere osculatrici, sarà bensì evoluta d' una delle due linee di massima, o di menoma curvatura; ma non conterrà perciò i suoi centri d' osculo.

Questa dichiarazione è tanto più necessaria, che il senso veramente attribuito dal Sig. La Grange alla conclu-

sione del n.° 143, Théorie des Fonct. Analyt. non par involto in alcun dubbio, stante il chiarissimo significato dei termini che adopera l'Autore stesso nell' indice della citata opera pag. V.

N° 142 . . . 143. *Examen des cas où le rayon osculateur est tangent à la courbe des centres de courbure, et où cette courbe est la développée de la proposée . . . Pag.* 165-168.

Profitterò dell' opportunità che mi offre la presente Appendice per aggiugnere le seguenti cose . (3)

Pag. 136. *lin.* 25. *Essendo sfuggita sott' occhio l'omissione d' un' intera linea, prego il Lettore, che in vece di quelle parole* alla data superficie *sostituisca* alla intersecazione d' un piano che passi pel dato punto, colla data superficie.

Al §. 138. Pag. 140.

L' ipotesi ammessa che i piani secanti passino tutti per una medesima retta, non potrà sempre conciliarsi con la condizione che vuolsi assegnare come caratteristica delle superficie involventi, sopra le quali cade il nostro ragionamento. Consiste questa condizione in ciò, che un piano tangente in qualunque punto della superficie estender debba il contatto per tutta la lunghezza indefinita della generatrice che passa per quel punto, § 84.

Ma una superficie di tal natura involvente e tangente le due date S, S' potrà sempre determinarsi con metodo generale.

In fatti si assegni una linea fuori delle due date superficie S, S', ed in essa una serie di punti. Per ciascheduno di questi punti potrà essere condotto un piano tangente ambedue le superficie S, S', o alternamente, o dalle medesime parti. § 136. Ponghiamo che il contatto con ciascheduna delle due superficie S, S' accada in un solo punto.

La retta, che passerà pei due punti di contatto, toccherà ambedue le superficie menzionate; e la serie di tut-

te le rette determinate in cotal modo, si troverà costituita in una superficie continua involvente e tangente le date S, S'. Questa superficie non potrà essere in contatto con un piano altrimenti che per tutta la lunghezza della retta generatrice. Fingiamo ora che il piano tocchi in più punti alcuna delle superficie date. O tutti i punti di contatto fra 'l piano, ed ambedue le superficie saranno in una medesima retta; ed allora questa verrà determinata nello stesso modo, come se unico fosse il punto di contatto del piano con ciascheduna delle superficie date. O vogliam supporre che i detti punti di contatto non si trovino tutti in una medesima retta; e dico poter bensì intervenire cotesto caso in alcuno de' piani tangenti, non in tutti consecutivamente.

Imperciocchè, secondo la data ipotesi, verrebbero determinati più sistemi, o serie diverse di rette tangenti ambedue le superficie S, S'. Per conseguenza o nascerà una sola superficie involvente, la quale conterrà tutte quelle rette, ovvero un sistema di esse giacerà in una superficie involvente, ed un altro sistema in un' altra. Nel primo caso un piano medesimo toccherà sempre in più rette la medesima superficie involvente. Fingiamo un altro piano che seghi e questa superficie, ed il piano tangente. Nascerà una curva per la prima sezione, ed una retta per la seconda. Quella retta poi dovrà toccare la curva in tanti punti, quante sono le rette di contatto fra la superficie ed il piano tangente.

Adunque la curva sarà di tal natura che una retta tangente in un punto qualsivoglia, dovrà toccarla sempre in un dato numero di altri punti; ciò che evidentemente è impossibile.

Nel secondo caso un piano che tocchi una, toccherà tutte le altre superficie involventi: ciascheduna per la lunghezza indefinita d' una retta generatrice.

Fingiamo, come sopra, che un piano seghi tutte coteste superficie, ed insieme il piano tangente. Nascerà un sistema di curve per la prima sezione, ed una retta per

la seconda. La retta poi dovrà toccare tutte le curve.

Queste dunque son tali che una retta la qual tocchi una di esse in qualunque punto, dovrà toccare ancora tutte le altre; ciò che è impossibile.

Al §. 144.

Abbiamo assegnate nel §. 48 due condizioni, come caratteristiche delle linee che sono fra loro paralelle. Ma vuolsi avvertire, ed ora possiamo dimostrare, che una di quelle condizioni è conseguenza necessaria dell' altra; cioè che se due linee sian tali che un piano normale ad una di esse, in qualunque suo punto, sia pure normale all' altra, la retta che unisce i due punti, ove il piano sega le due curve, sarà sempre d' una medesima lunghezza, variando i punti d' intersecazione fra le due curve ed il piano normale.

Nominiamo P P' P'' . . . una delle due curve, $p\,p'\,p''$. . . l' altra, e denotiamo per le lettere P, P', P'' . . . alcuni punti nella prima, disposti in serie con qualche legge. Per tali punti immaginiamo condotti altrettanti piani normali che seghino ancora l' altra curva ne' correlativi punti p, p', p''. . . Le rette che uniranno i due punti P, p, i due P', p', i due P'', p'', ec. saranno, per ipotesi, tutte perpendicolari ad ambe le curve. Io dico in oltre che saranno tutte fra loro eguali. Imperciocchè fingiamo descritto nello spazio il poligono rettilineo che si determina dai punti P, P', P'' . . ., come pur quello determinato dai punti p, p', p'' . . ., indi supponghiamo condotte le rette che uniscono i due punti P, p', i due P', p'', i due P'', p''', ec.

Il triangolo rettilineo determinato dai tre punti P, p, p' si faccia rotare intorno al suo lato P p', finchè si adatti al piano del successivo triangolo, determinato dai tre punti P p' P'. Il sistema di cotesti due triangoli, costituiti in un piano, roti intorno alla retta P' p', finchè si pongano in un medesimo piano col triangolo consecutivo P' p' p'', e così di mano in mano. I punti P, P', P''. . ., come pure i correlativi p, p', p'' . . . verranno a disporsi nel medesimo piano

con una legge. Adunque a ciascuno dei due poligoni PP'P''..., $pp'p''$... stesi in piano, potrà essere circoscritta una linea continua.

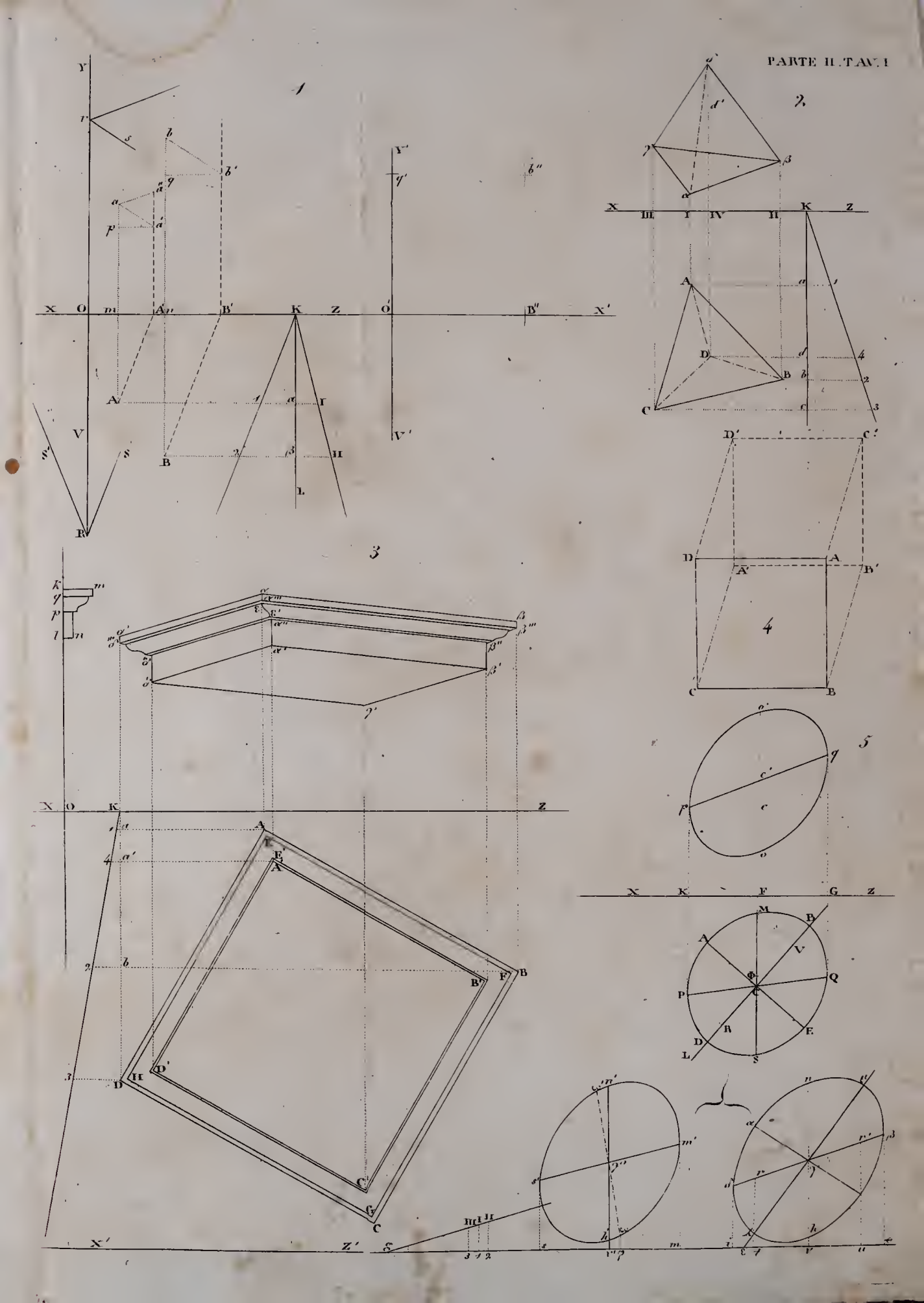
Moltiplicando il numero, e scemando la lunghezza dei lati P P', P' P'' ..., pp', $p'p''$ ..., ciascuno dei due poligoni stesi in piano si accosterà dunque indefinitamente ad una curva, che sarà suo limite; mentre ogni lato si accosterà pure indefinitamente ad una tangente della curva stessa.

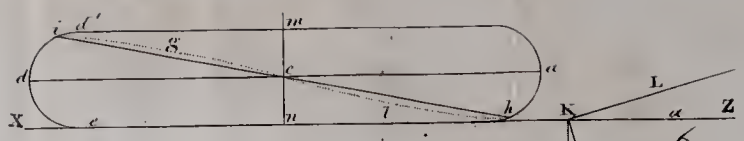
Ma frattanto il lato corrispondente del correlativo poligono, che immaginiamo costituito nello spazio, si accosta ad una tangente della sua curva rispettiva.

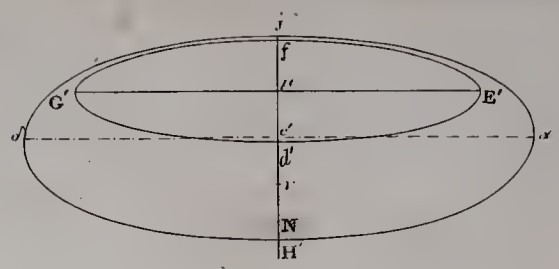
Adunque l'angolo che formerà qualunque lato, a cagion d'esempio P P', colla contigua retta P' p', perpendicolare ad ambedue le curve date, s'accosterà indefinitamente all'angolo retto. Lo stesso dicasi dell'angolo che formerà il lato pp' colla contigua perpendicolare Pp, comune alle due curve proposte. Ma cotesti angoli rimangono inalterati mentre stendesi in piano la serie de' triangoli Ppp', Pp'P' ..., come sopra fu detto.

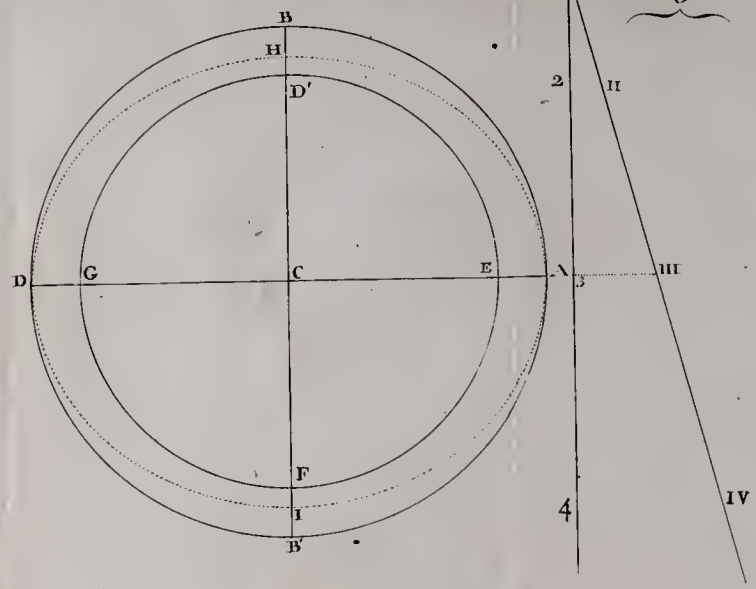
Adunque gli angoli che formano i lati dei due poligoni P P' P'' ..., $pp'p''$ ..., stesi in piano, colle rispettive rette ad essi contigue Pp, P'p', P''p''..., s'accostano indefinitamente ad altrettanti angoli retti, nel tempo stesso che accostansi i lati medesimi indefinitamente ad altrettante tangenti delle curve rispettive.

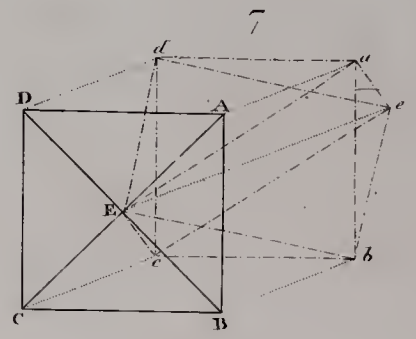
Segue da ciò che le rette Pp, P'p', P''p'' ..., disposte nel piano, son tutte perpendicolari ad ambedue le curve limiti de' poligoni P P' P'' ..., $pp'p''$ ... Coteste curve sono dunque evolventi d'una medesima evoluta, § 141. Laonde le rette Pp, P'p', P''p''... sono tutte eguali fra loro, § 144. Ma quelle rette, mentre spiegasi in un piano la serie de' triangoli Ppp', P'$p'p''$ ... ec. conservano immutate le loro lunghezze; dunque tutte le rette Pp, P'p', P''p''..., comuni perpendicolari alle due curve proposte, son necessariamente fra loro eguali.

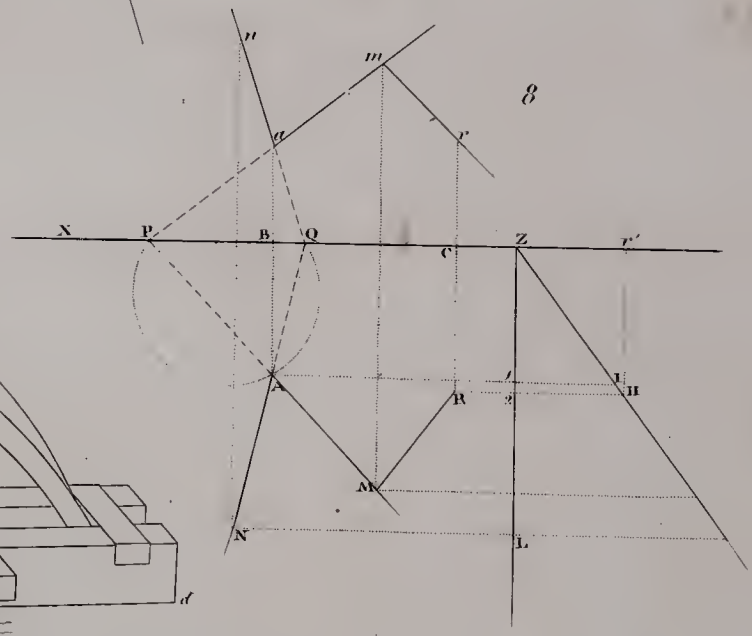

1
2
3
4
5
X
O
K
Z
X'
Z'
A
B
C
D
E
F
G
H
M
P
Q
V
L
S

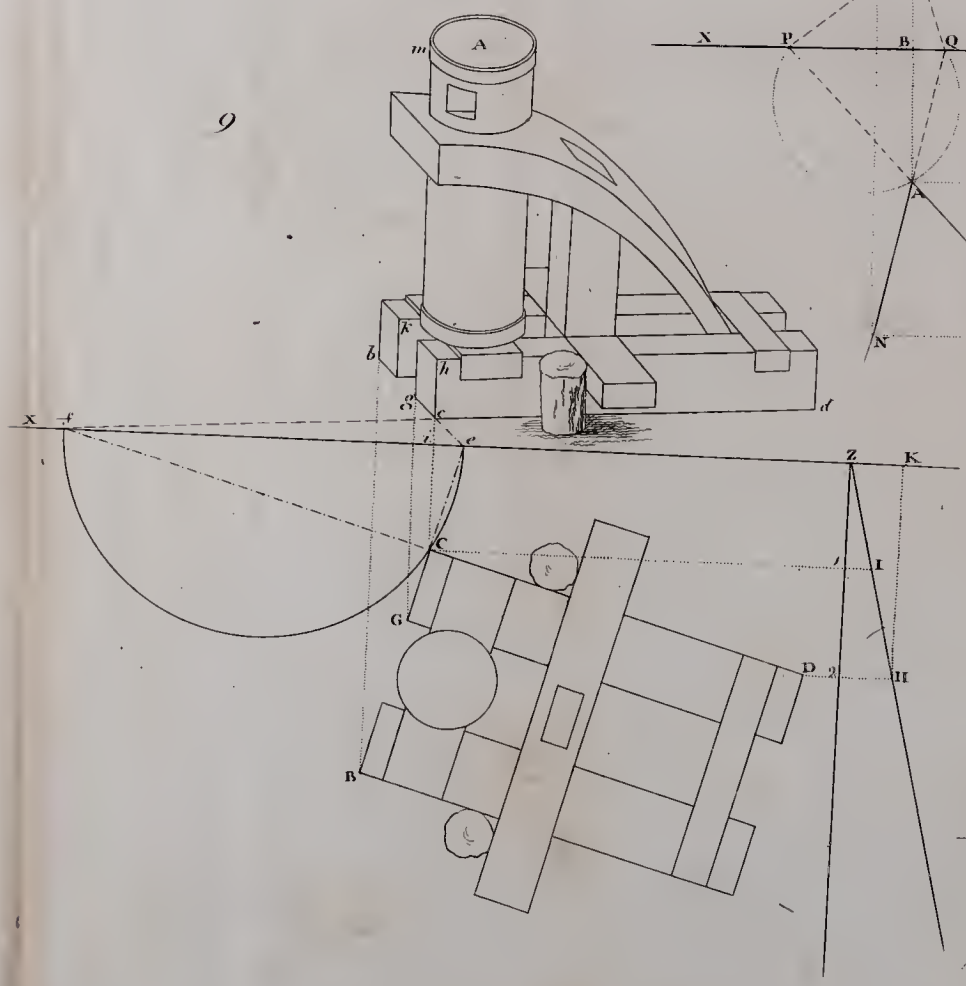

X
Z
K
L
6

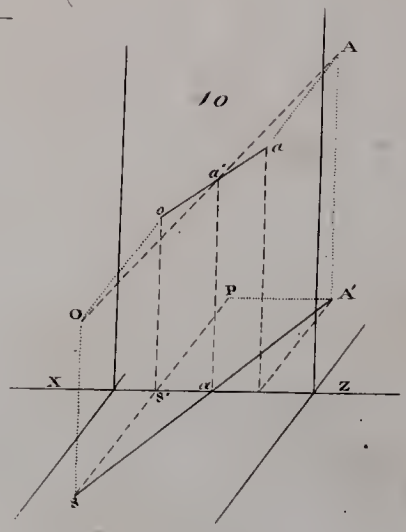

G'
E'
H'
N

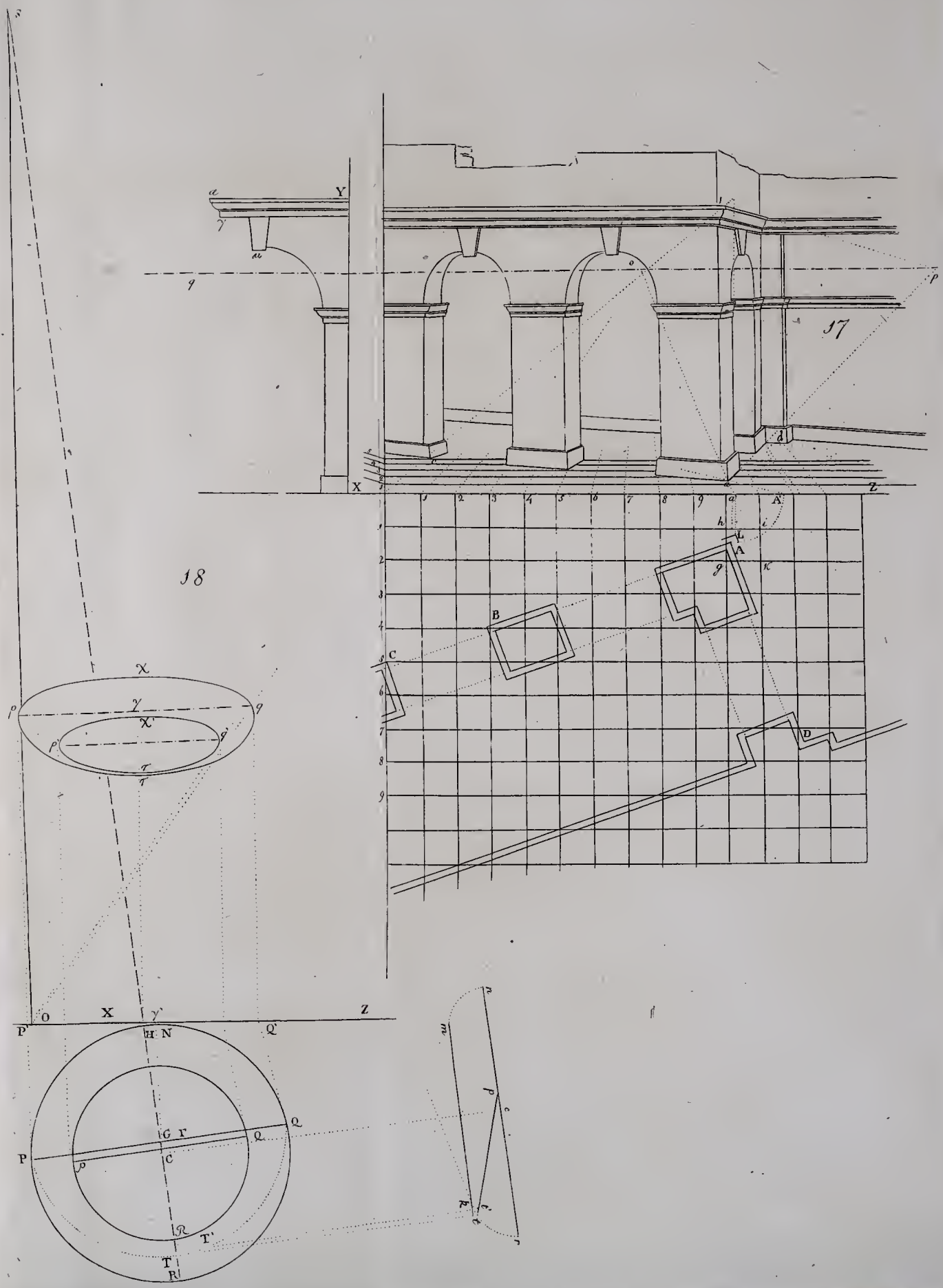

B
H
D'
D
G
C
E
A
F
I
B'
2
II
III
4
IV

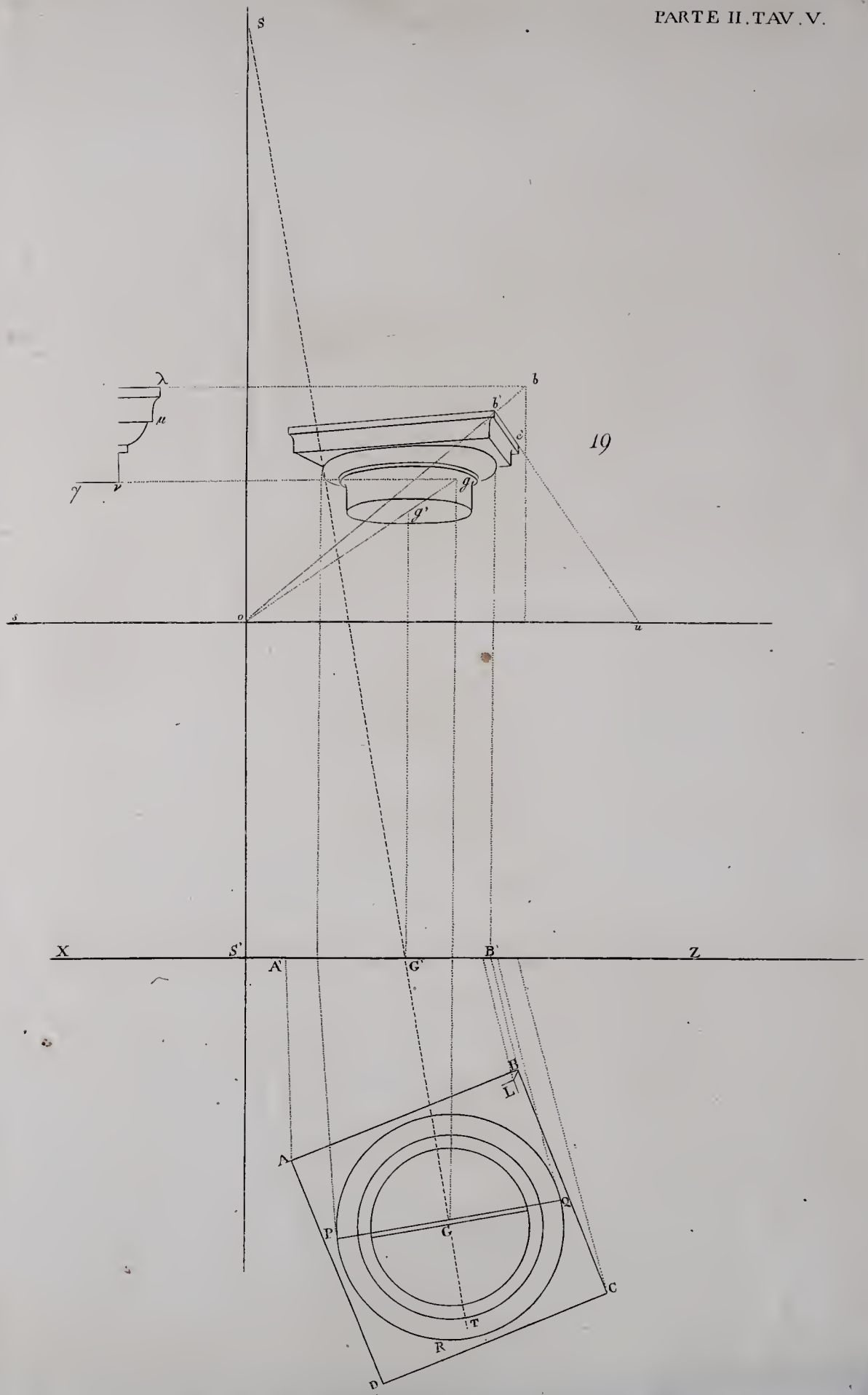

7
D
A
E
C
B


8
X
P
B
Q
C
Z
A
R
M
N
L
I
II

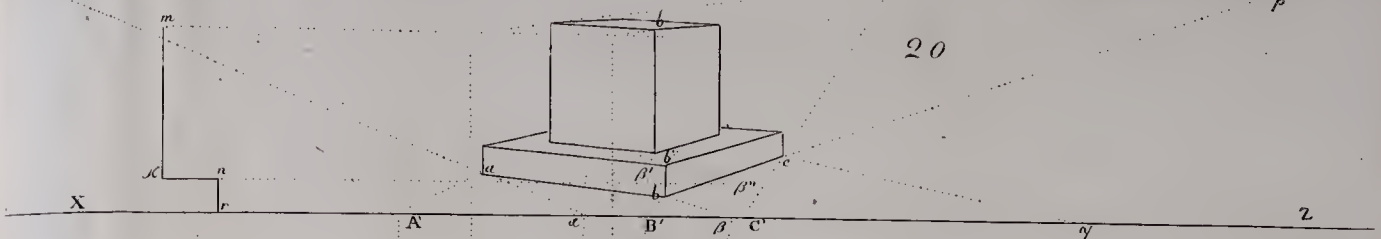

9
A
m
b
h
X
f
C
G
B
Z
K
I
D
II

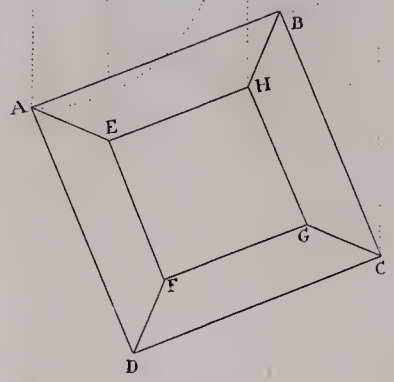

10
A
a
O
P
A'
X
Z
s

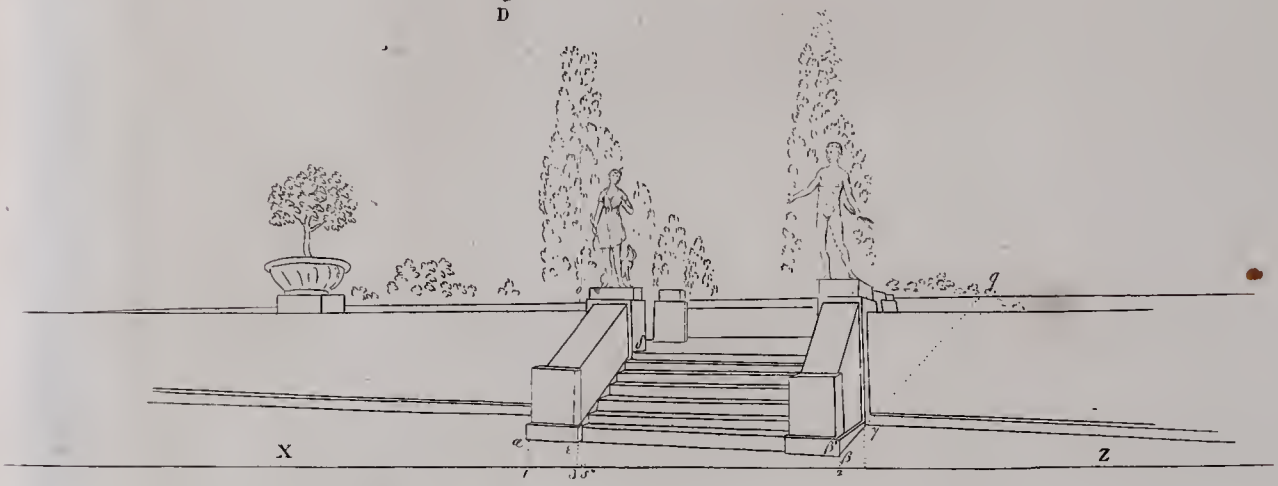

17
18
X
Y
Z
A
B
C
D
L
P
Q
R
T
O
N
G
C


19
S
λ
μ
γ
ν
b
b'
c'
g
g'
s
o
u
X
S'
A'
G'
B'
Z
B
L
A
P
G
Q
C
T
R
D

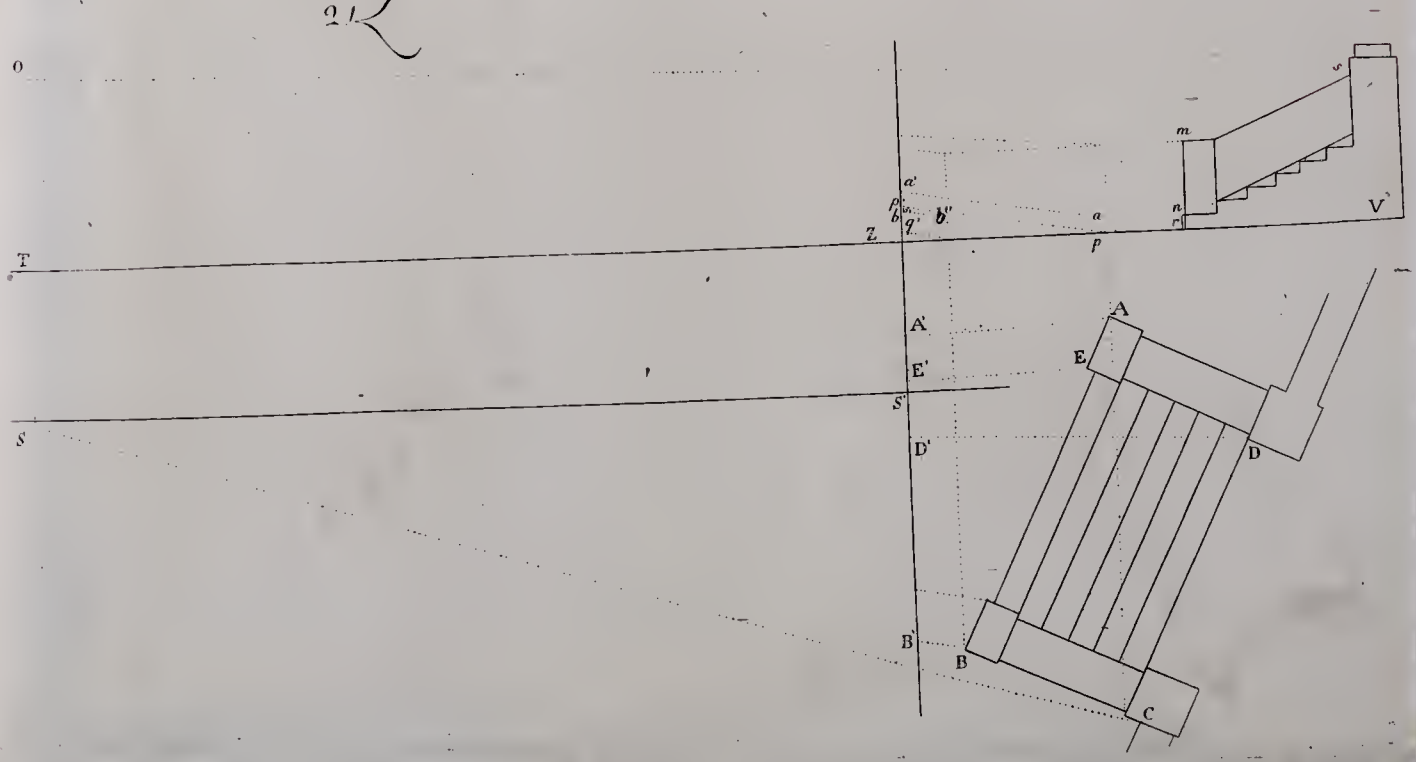
20



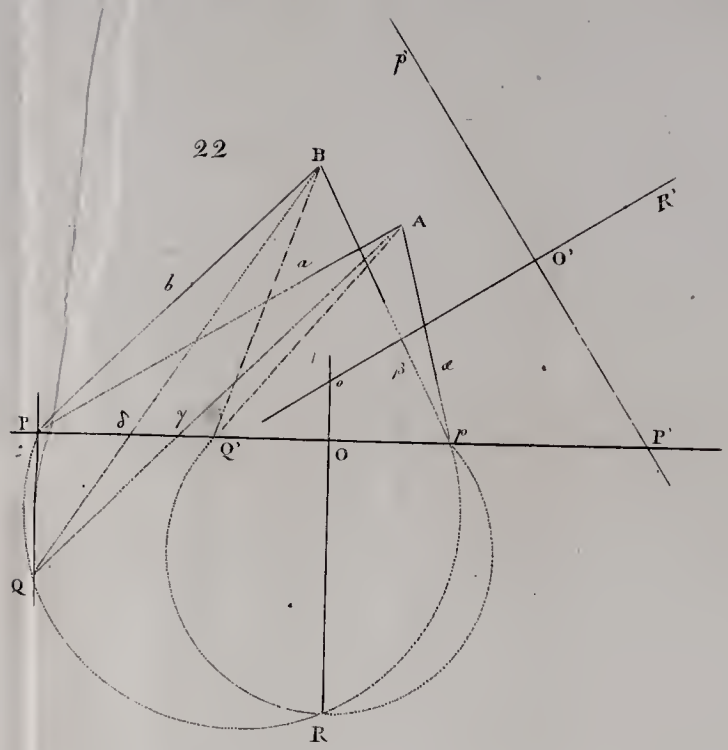




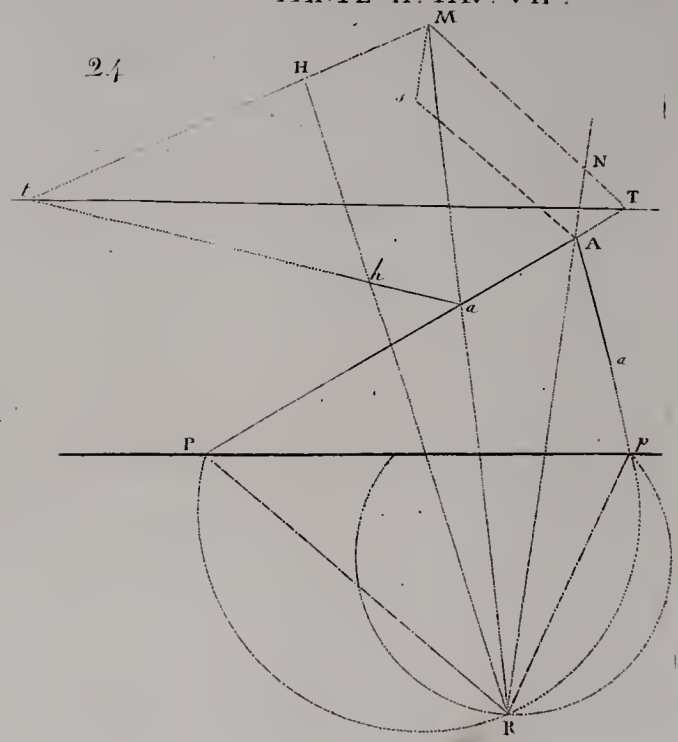
21



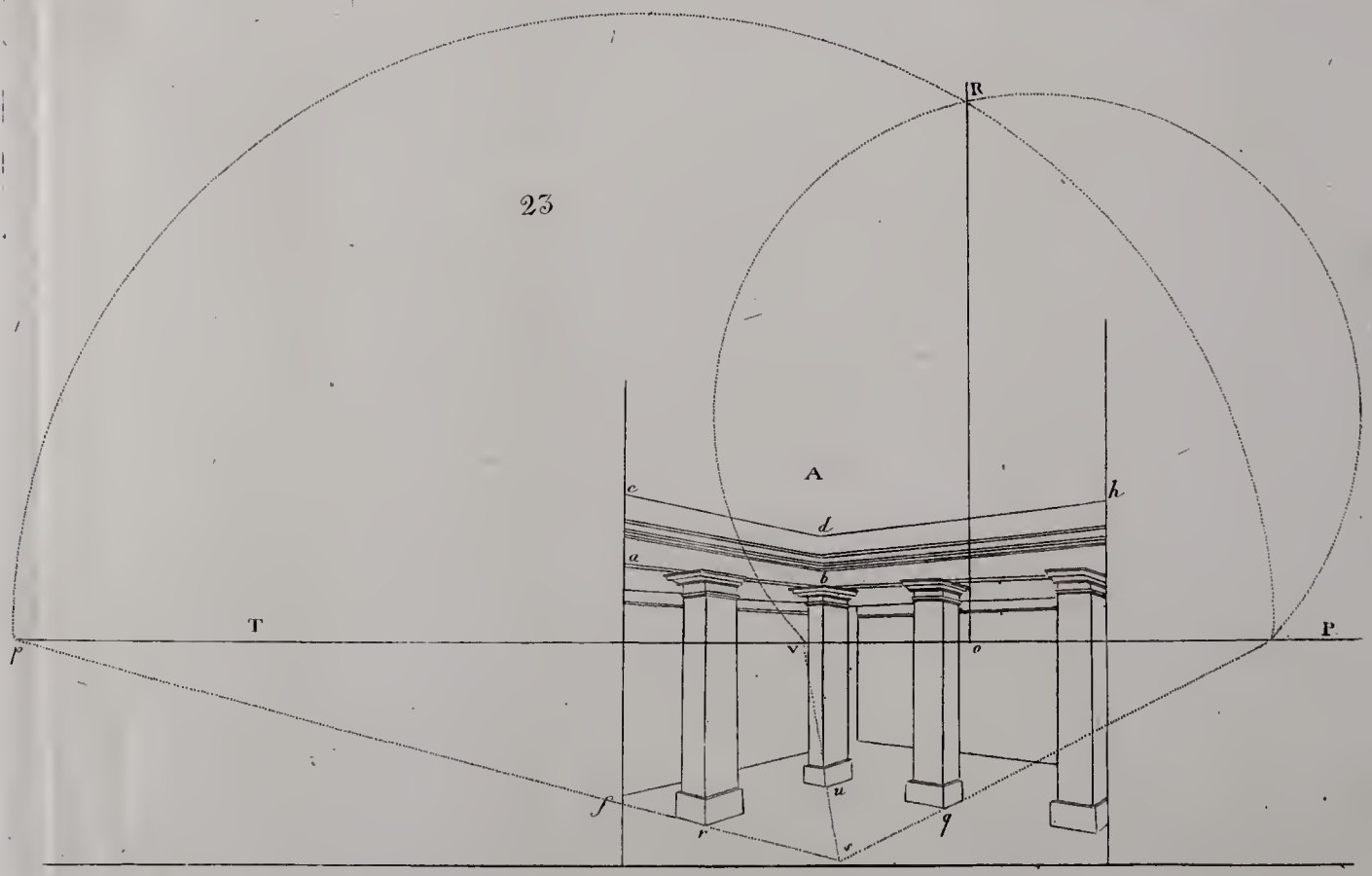
22

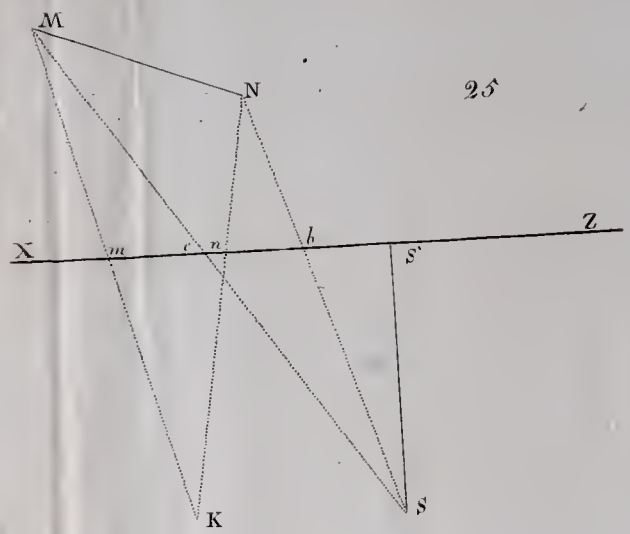


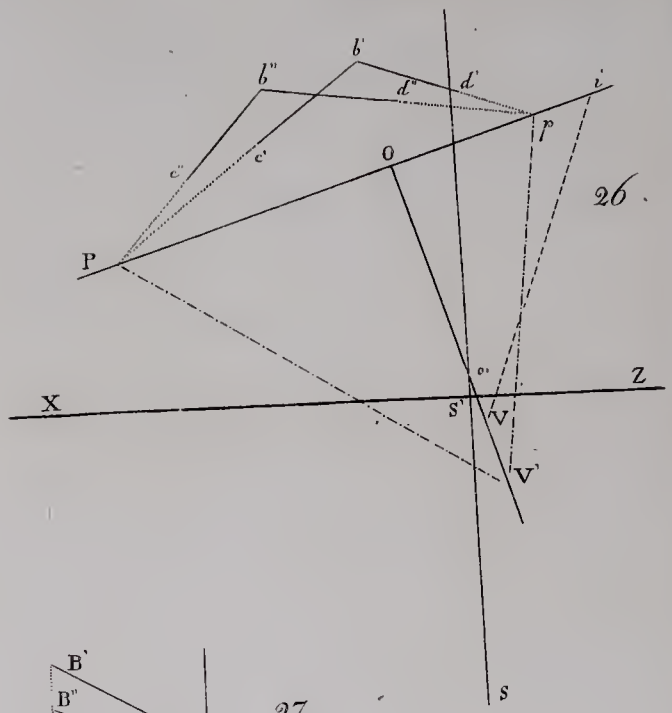
24

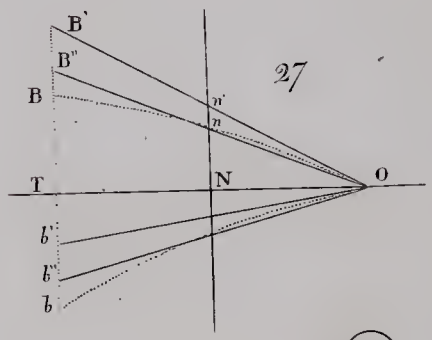


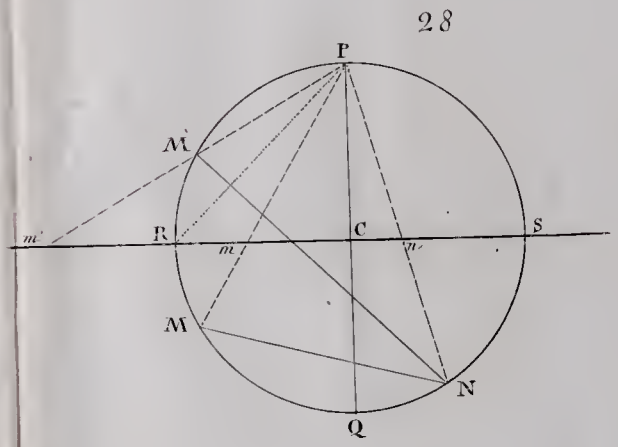
23

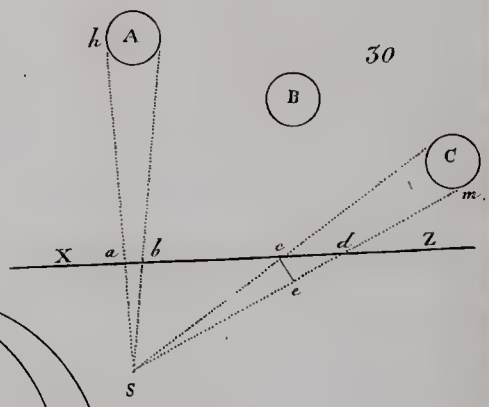


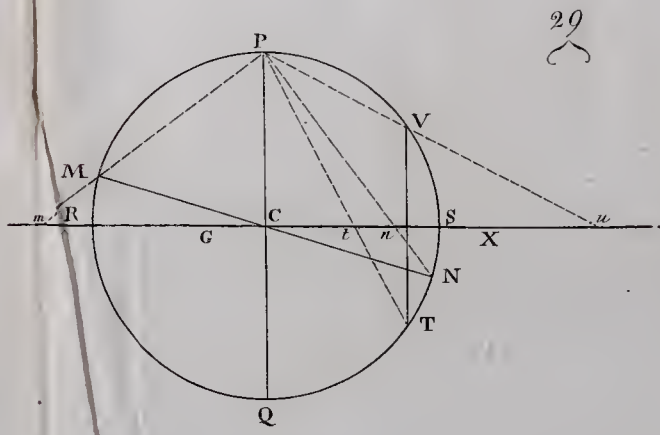

M
N
25
X
m
c
n
b
s'
Z
K
S

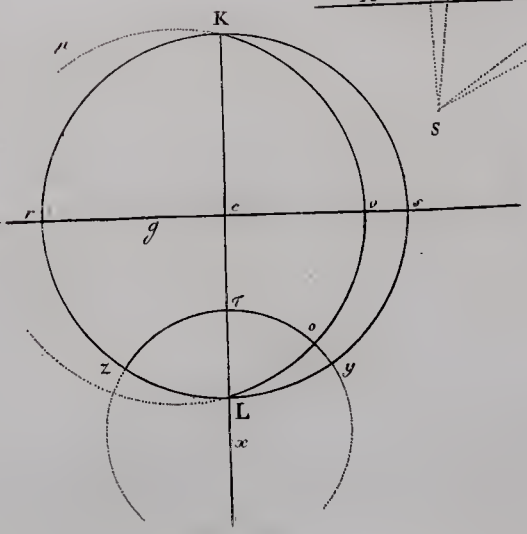

b'
b''
d''
d'
i
p
c'
c
O
26
P
o'
Z
X
s'
V
V'
S


B'
B''
B
27
n'
n
T
N
O
b'
b''
b

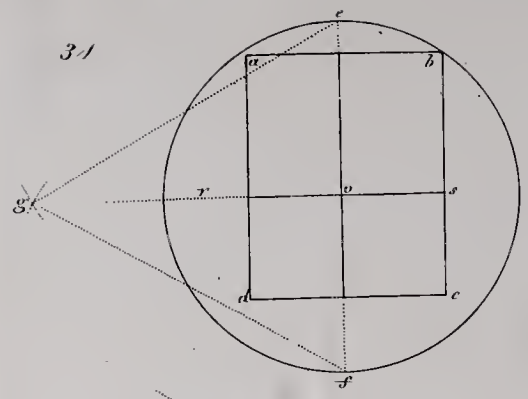

28
P
M'
m'
R
C
S
m
n
M
N
Q


h
A
30
B
C
m
X
a
b
c
d
Z
e
S

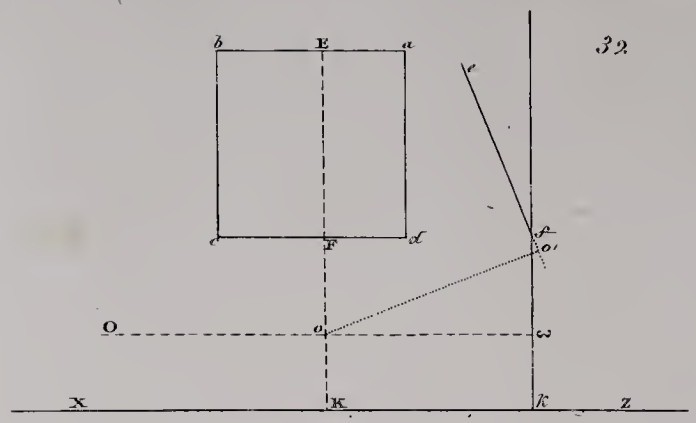

29
P
V
M
m
R
C
S
u
G
t
n
X
N
T
Q


K
r
c
v
s
g
σ
o
z
y
L
x

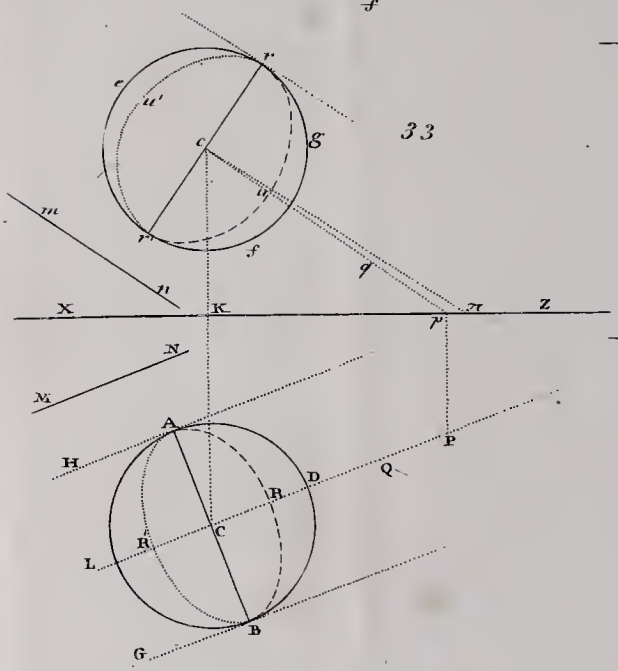
31



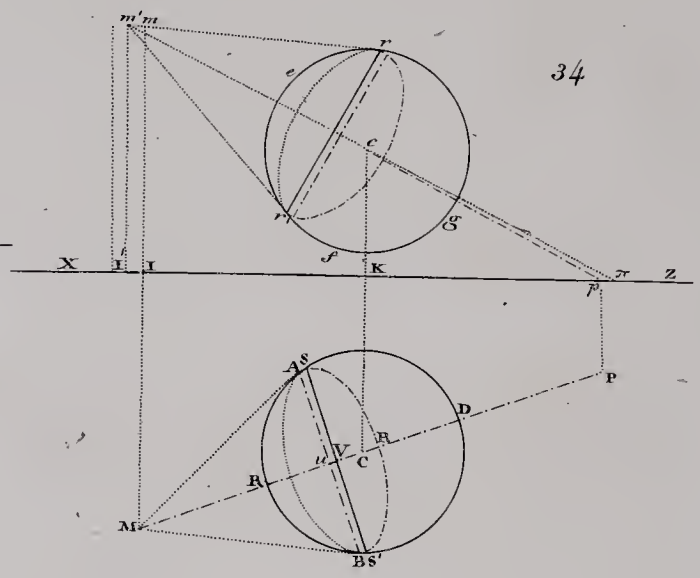
32



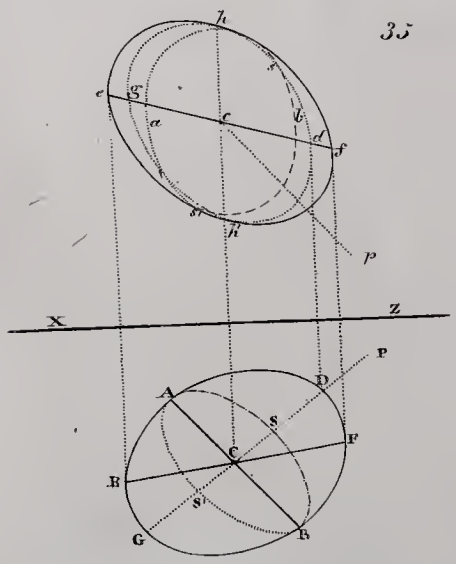
33



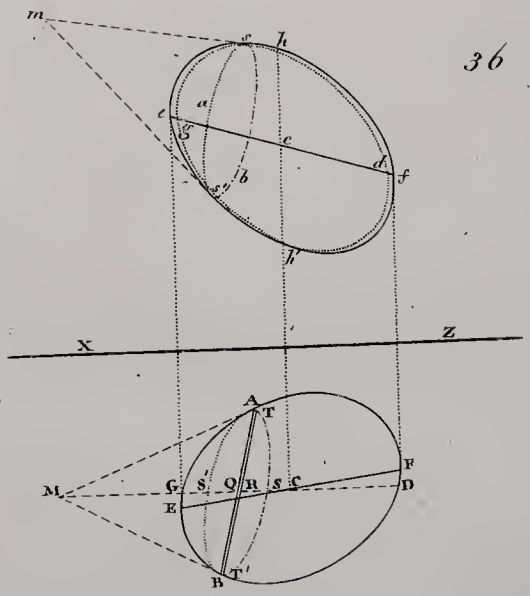
34



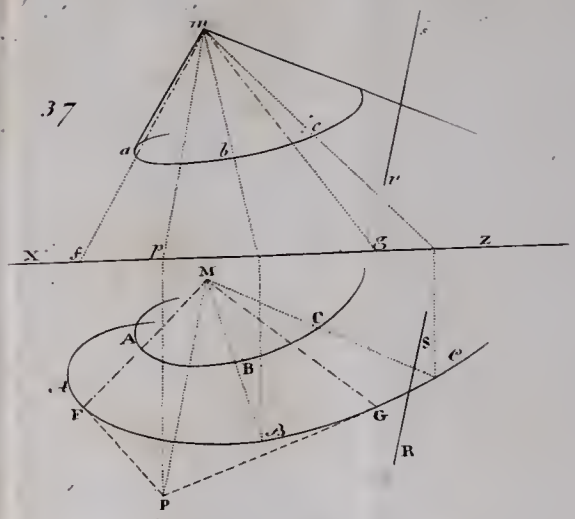
35



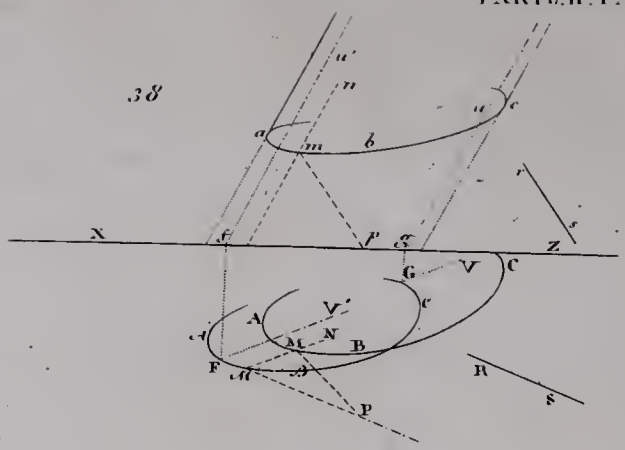
36

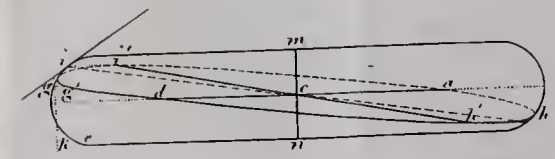


37

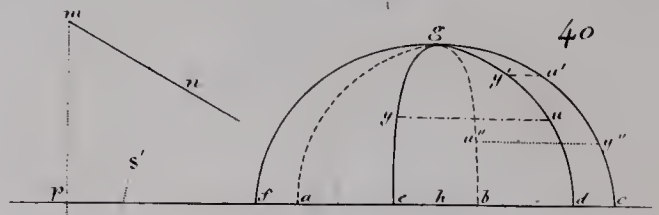


38

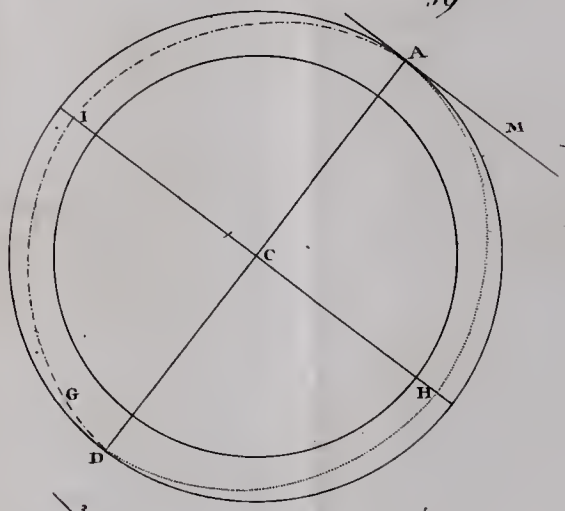


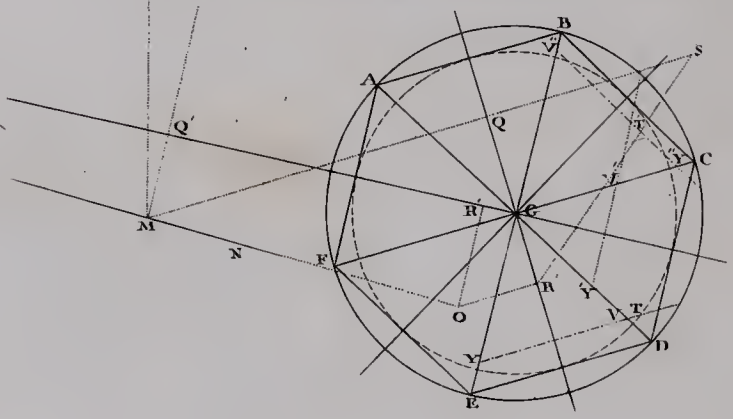


40

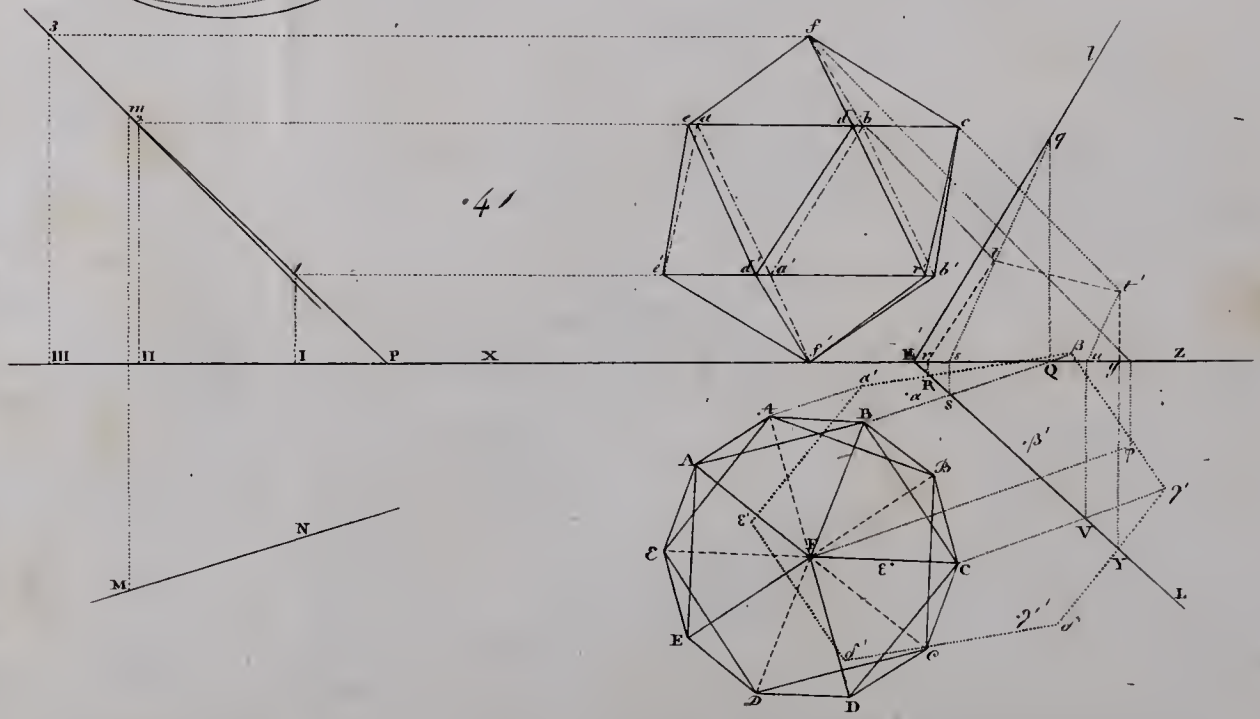


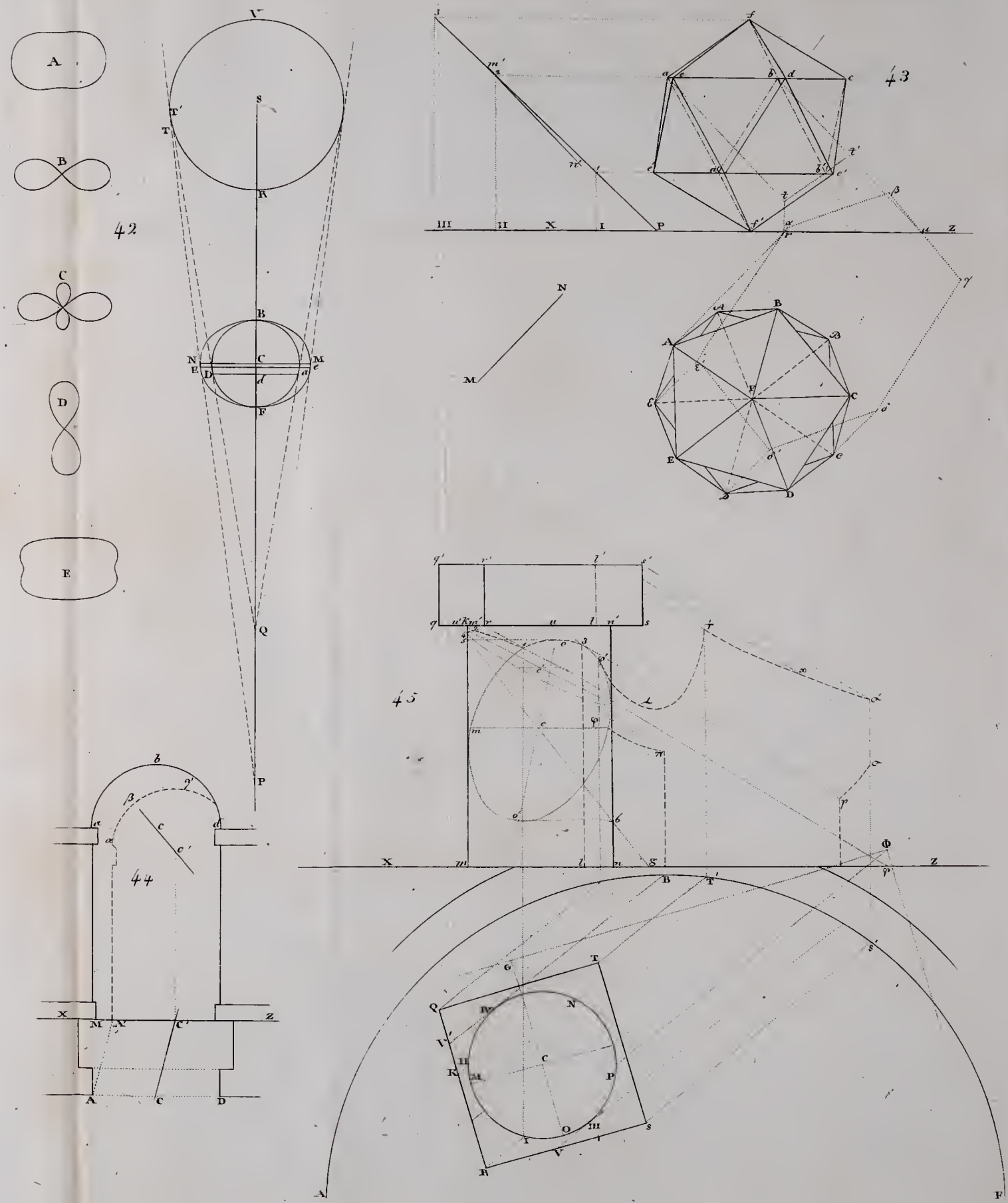
39



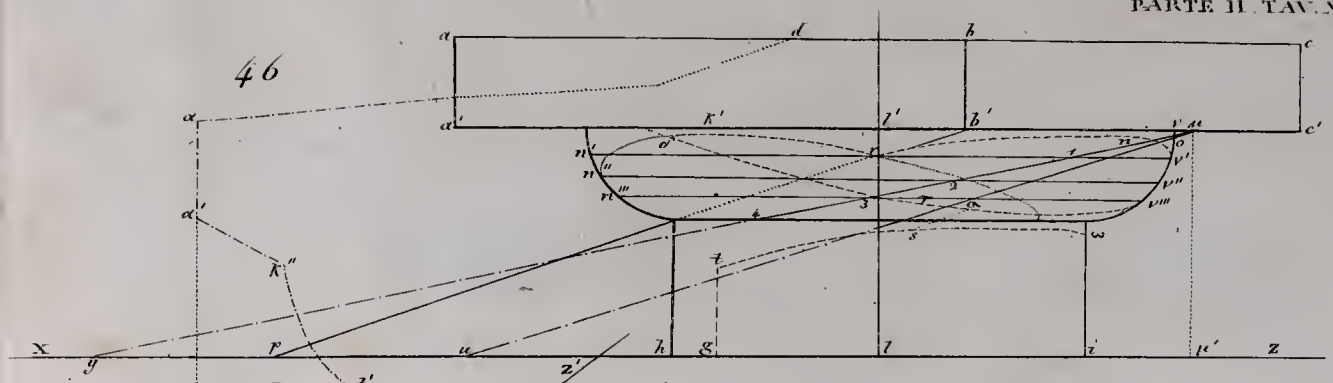


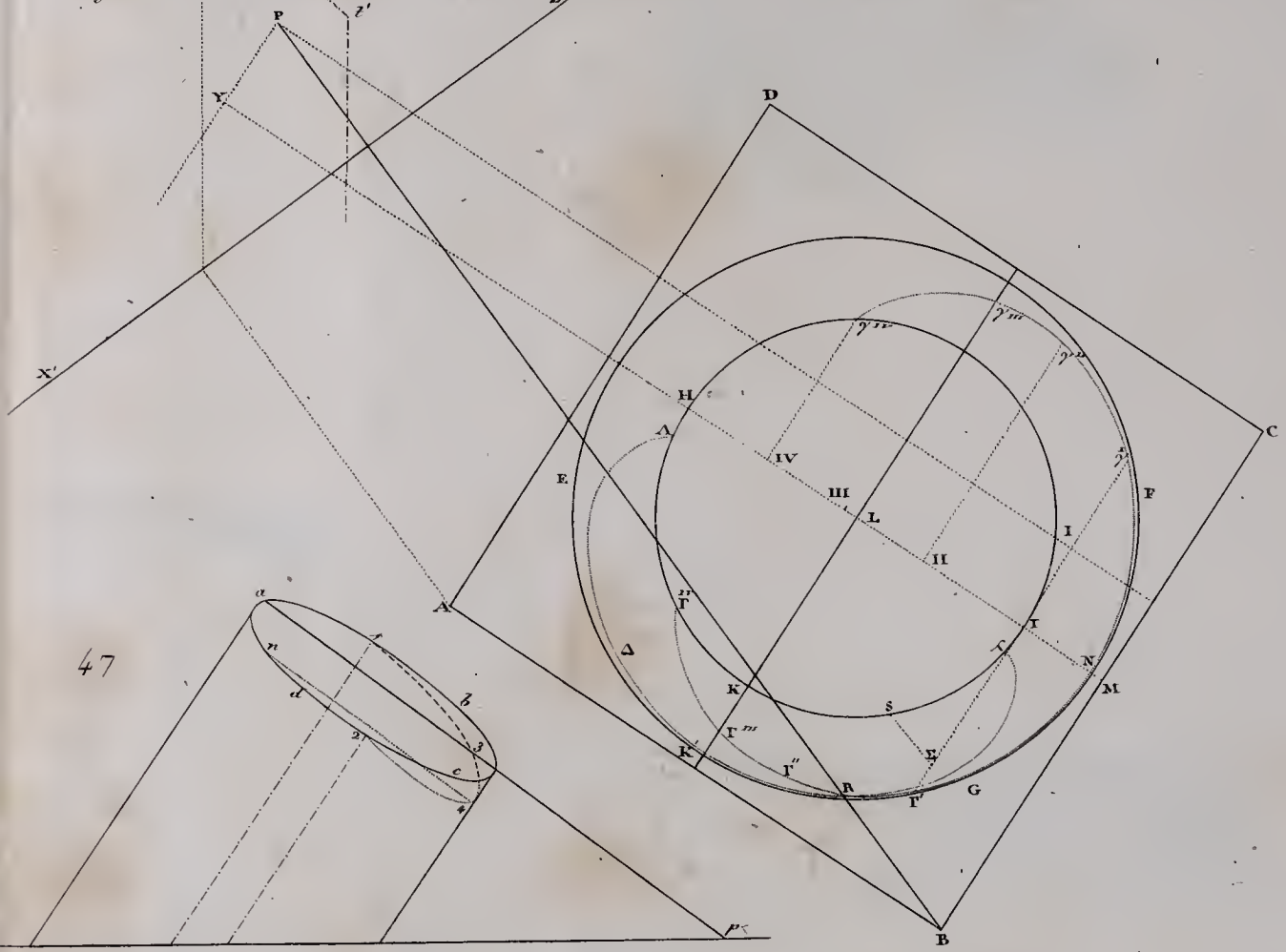
41



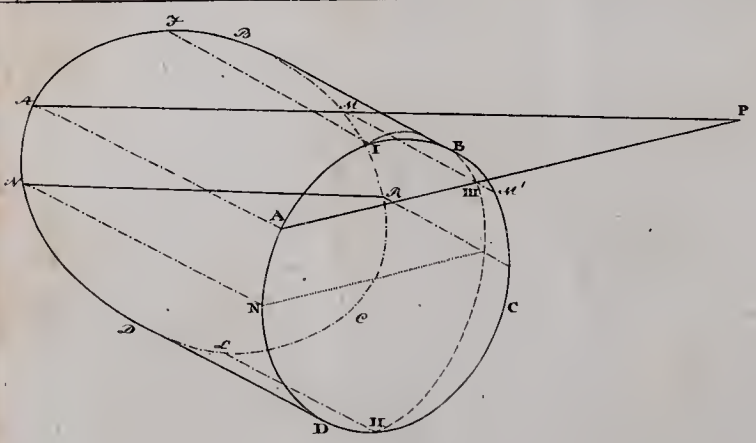

A
B
C
D
E
42
43
44
45
V
S
T'
T
R
B
N
E
D
C
M
d
a
e
F
Q
P
III
II
X
I
P
Z
N
M
A
B
C
D
E
F
X
M
Z
B
T'
Q
R
S
T
G
N
C
P
O
III
I
V
K
M
II
IV
V'
A
F
Φ

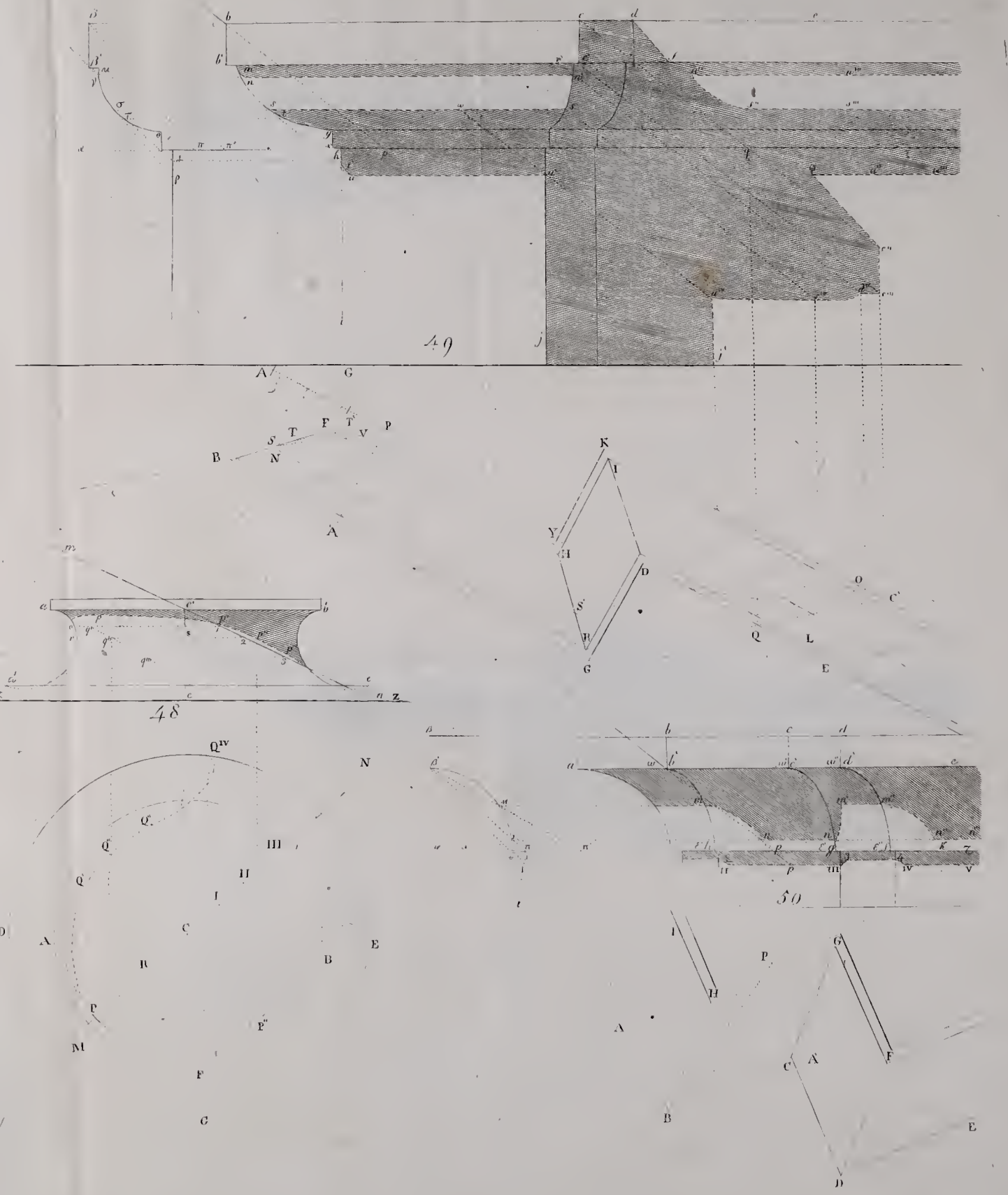
46

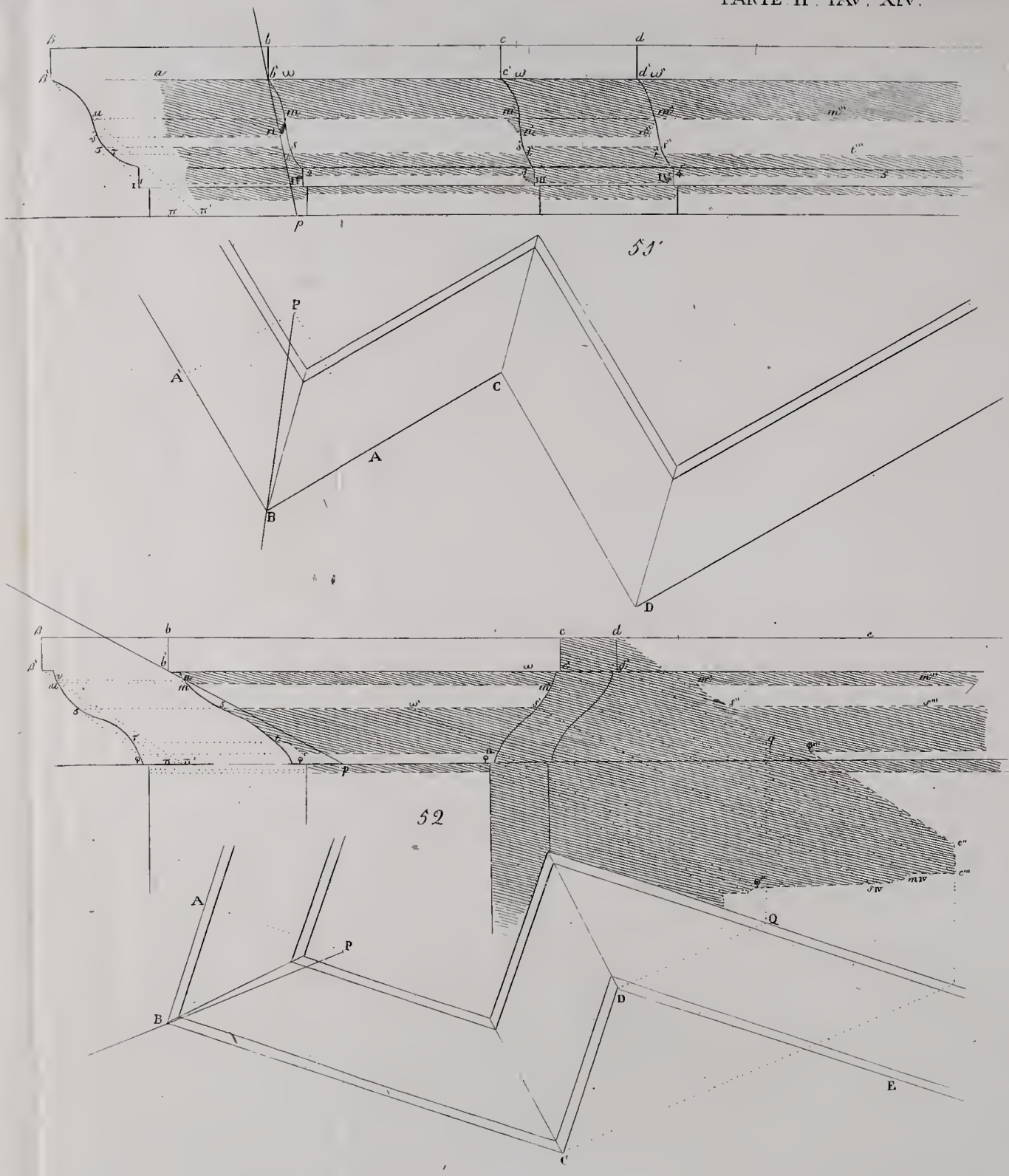


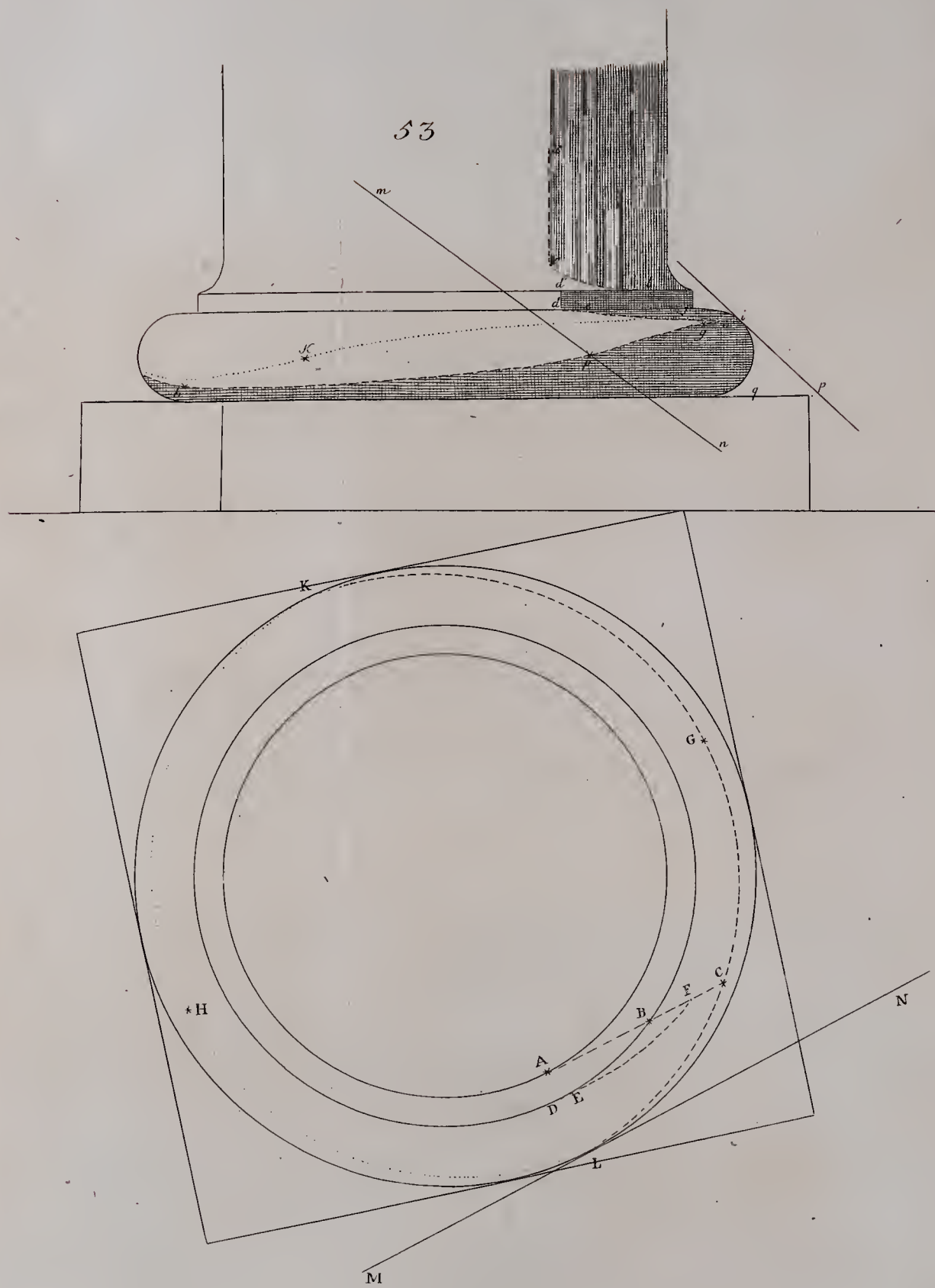


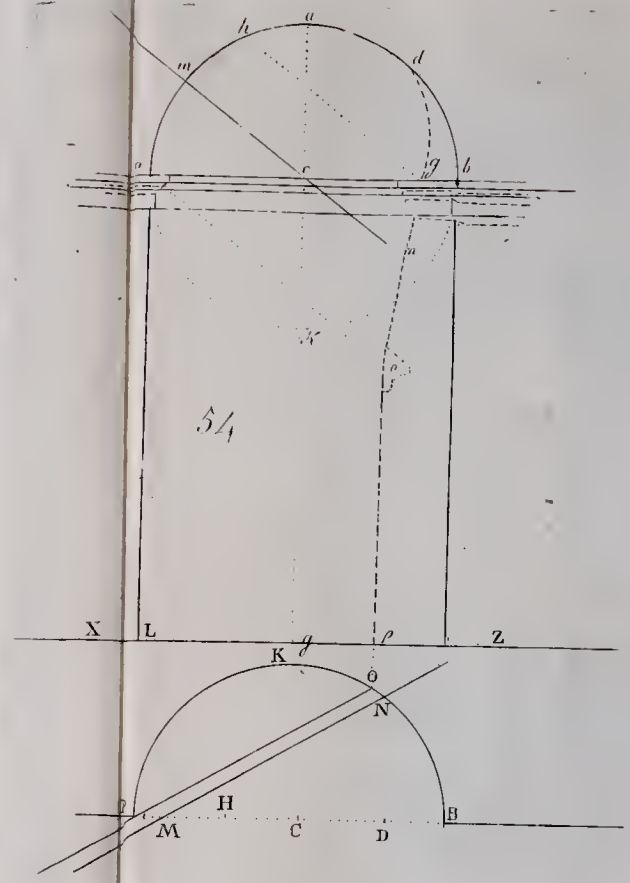
47

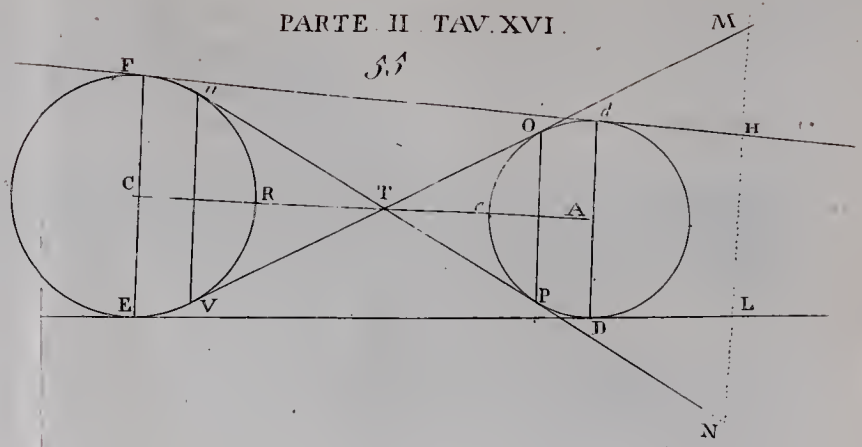


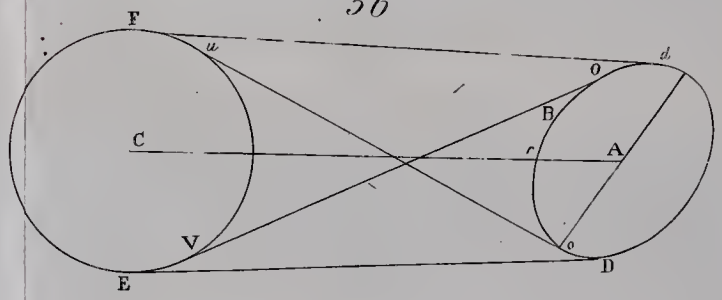

49
48
50

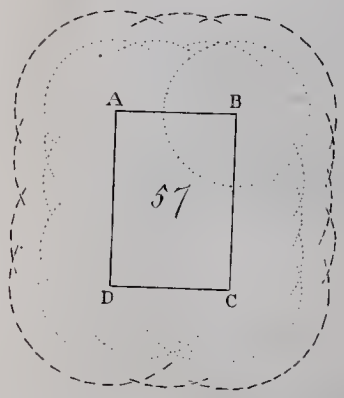

51
52
P
A
B
C
D
Q
E

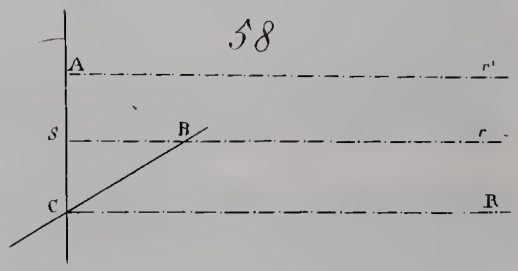

53
m
n
p
q
K
G
H
A
B
C
D
E
F
L
M
N

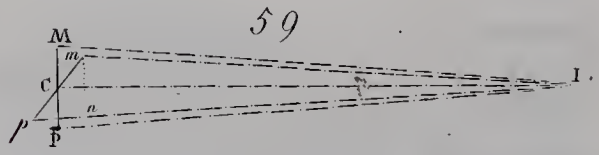

54
X
L
g
e
Z
K
O
N
H
M
C
D
B

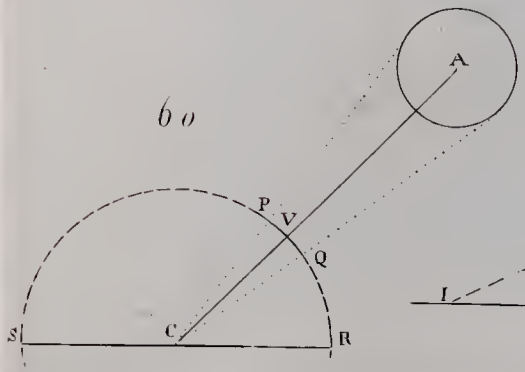

55
F
O
d
H
M
C
R
T
c
A
E
V
P
L
D
N

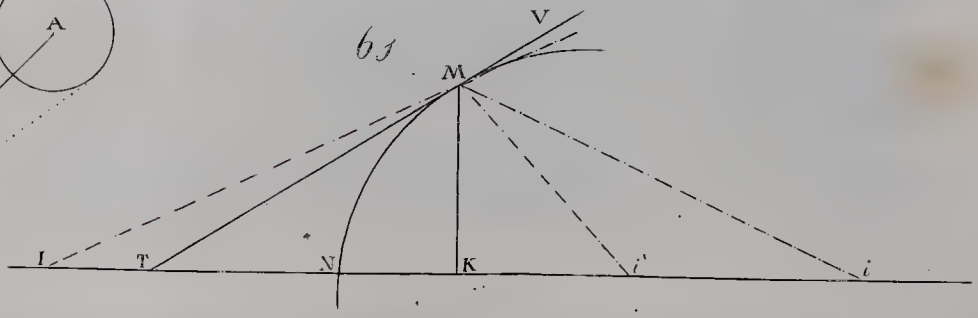

56
F
u
O
d
B
C
r
A
V
o
E
D

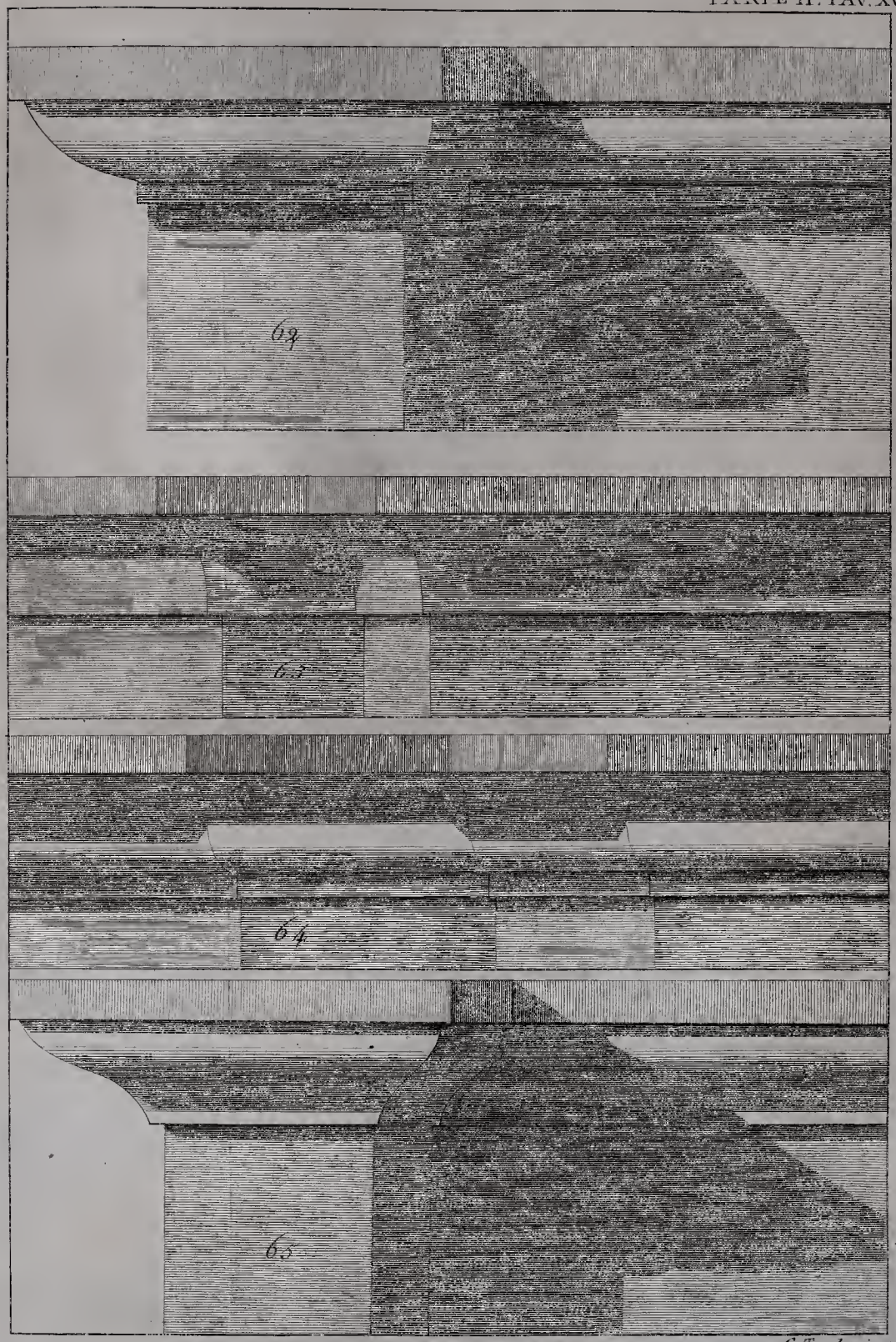

A
B
57
D
C


58
A
r'
S
B
r
C
R


59
M
m
C
I
n
P

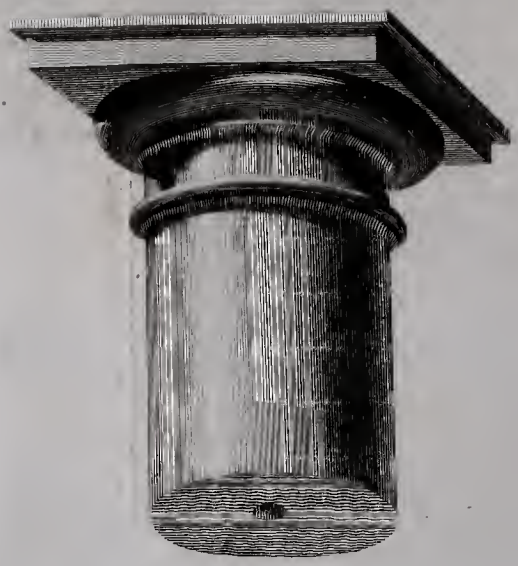

60
A
P
V
Q
S
C
R


61
V
M
I
T
N
K
i'
i



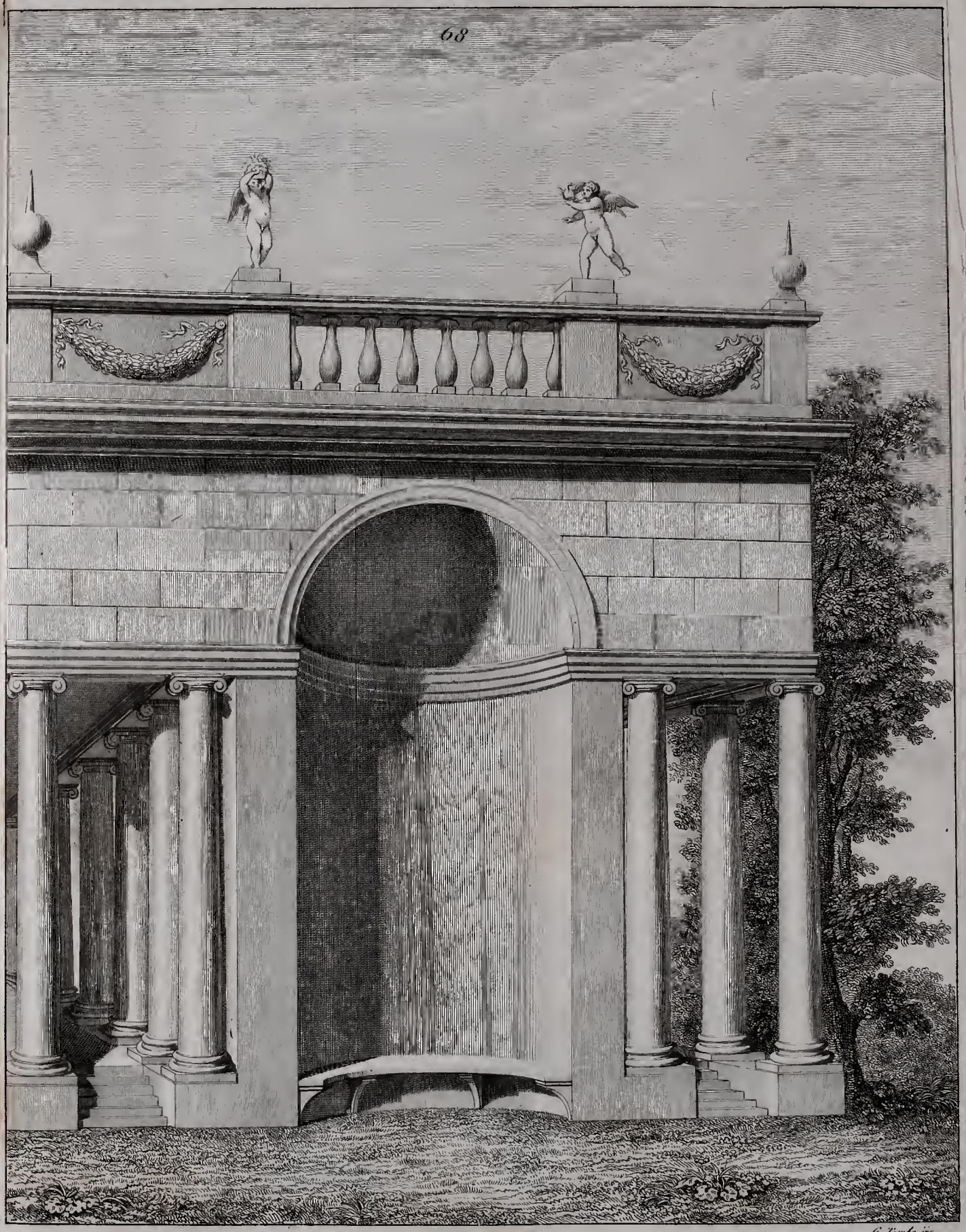
G. Tomba inc.

67



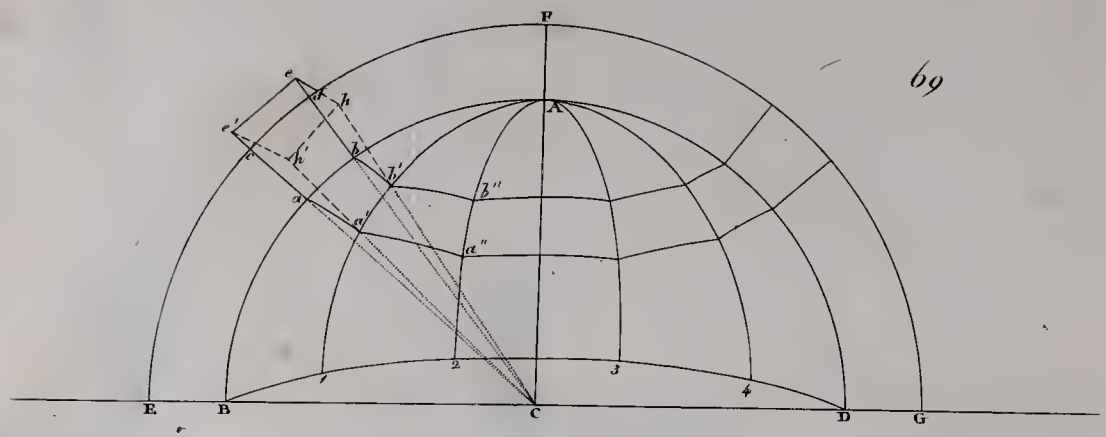
66

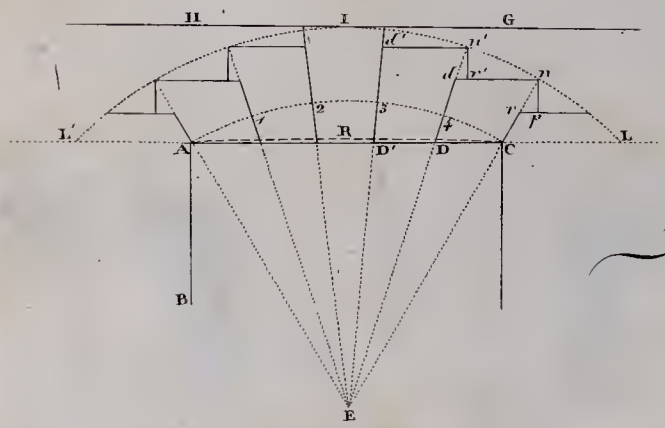
G. Tomba inc.

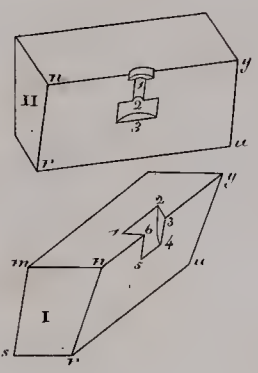


G. Tomba inc.

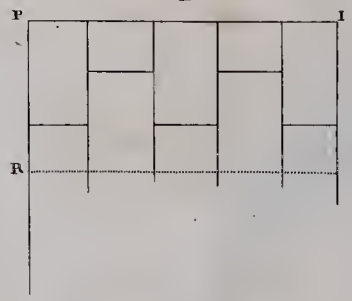
69

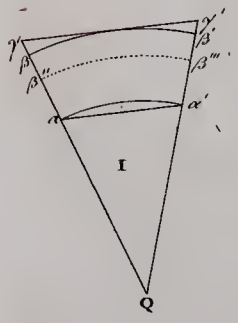




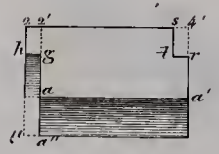


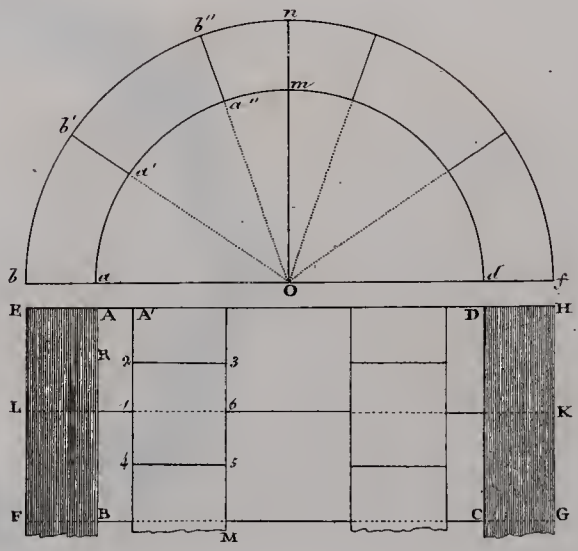
70



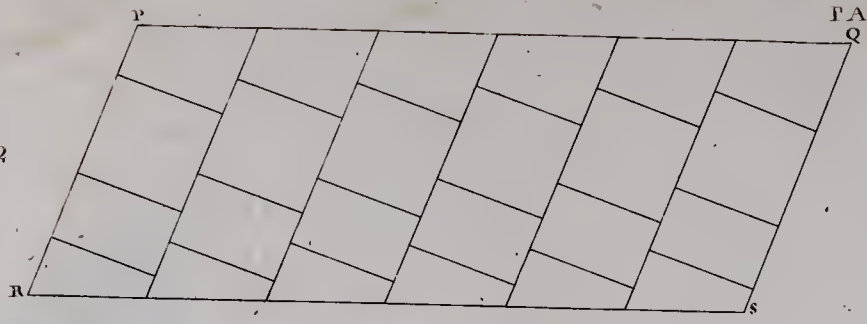


71

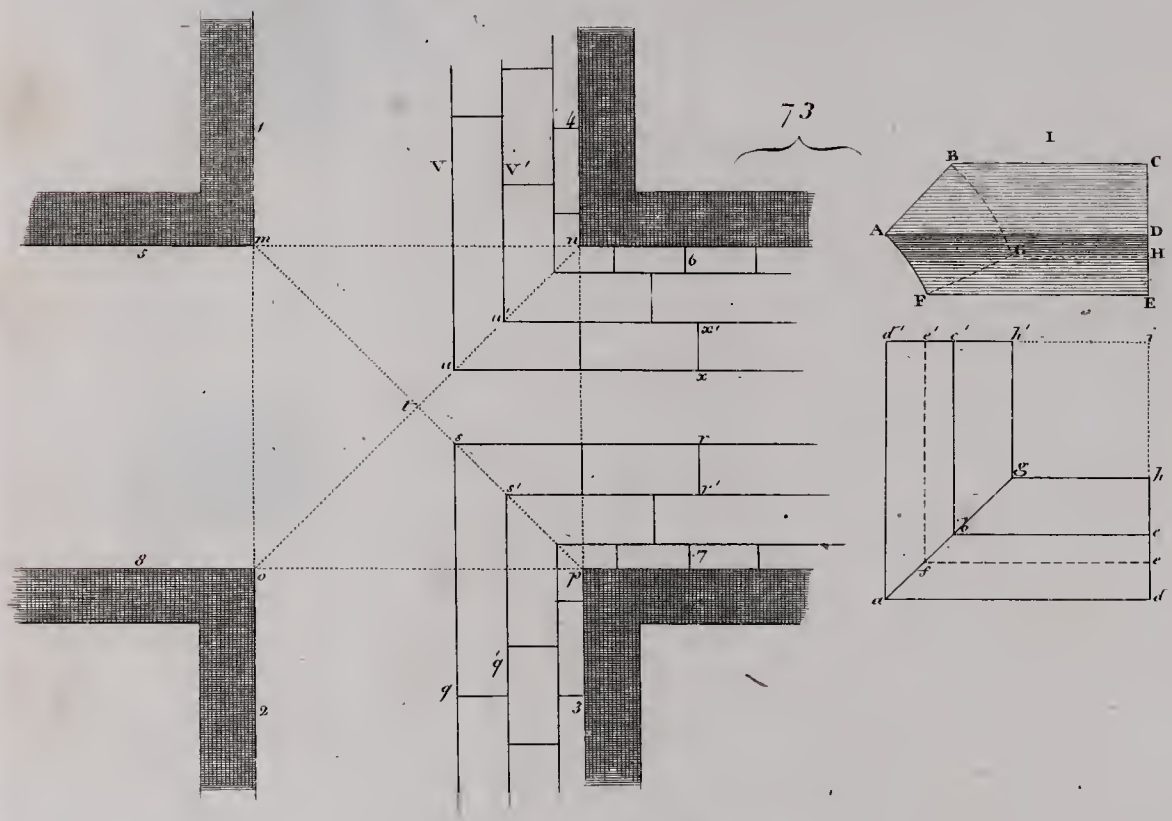


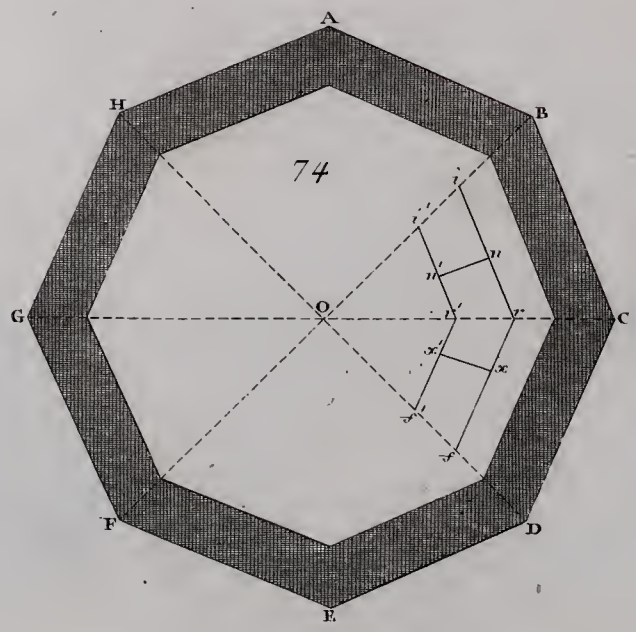


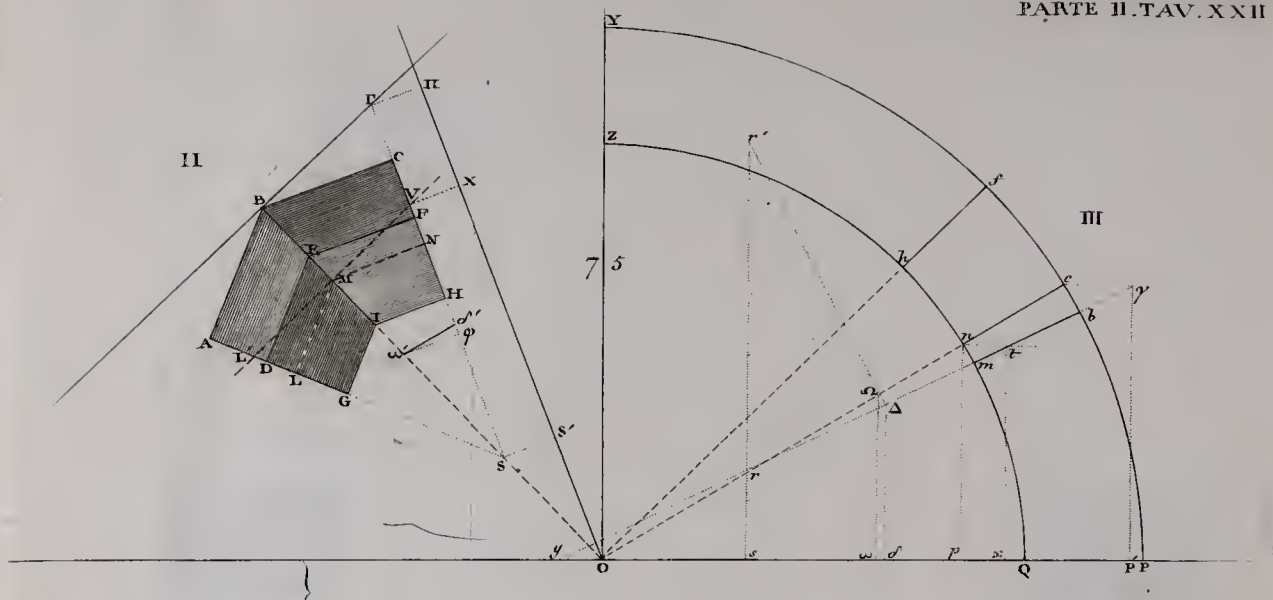
72

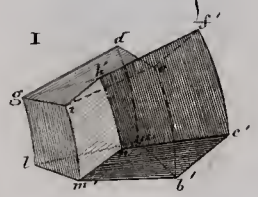


73

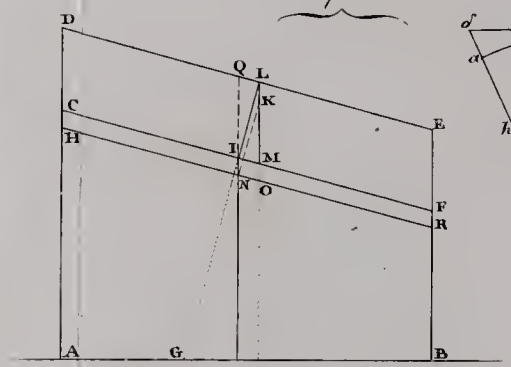


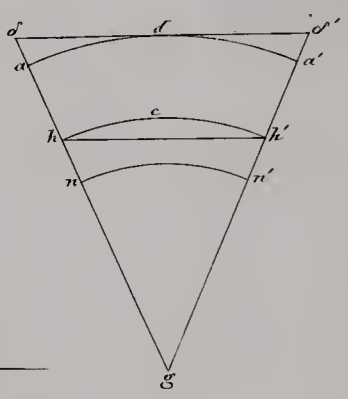



II
III
75
Y
Z
O
Q
P P

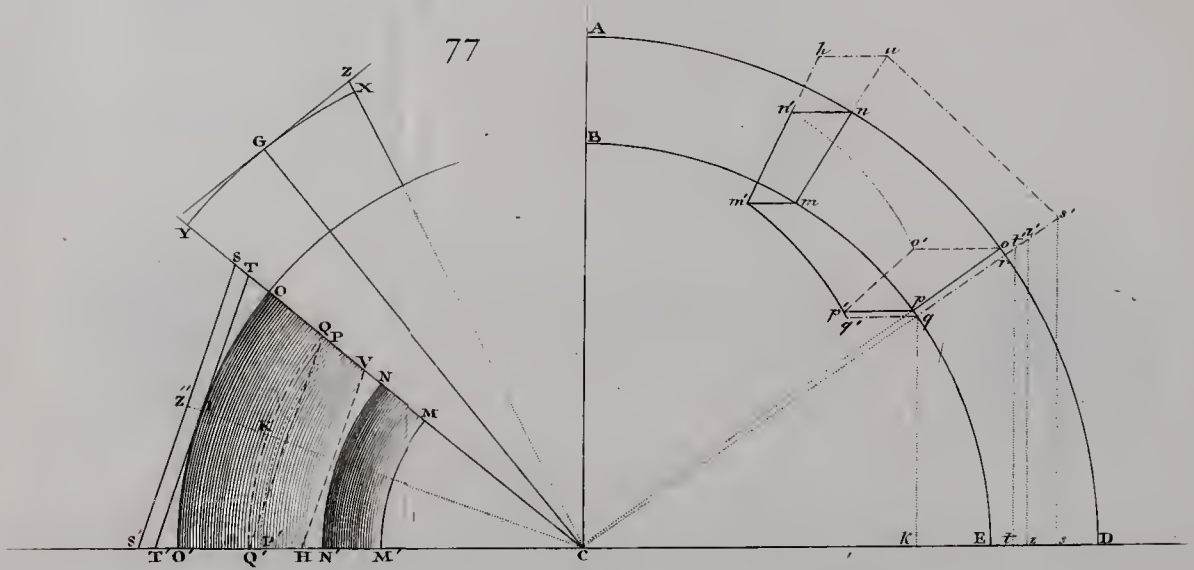

I

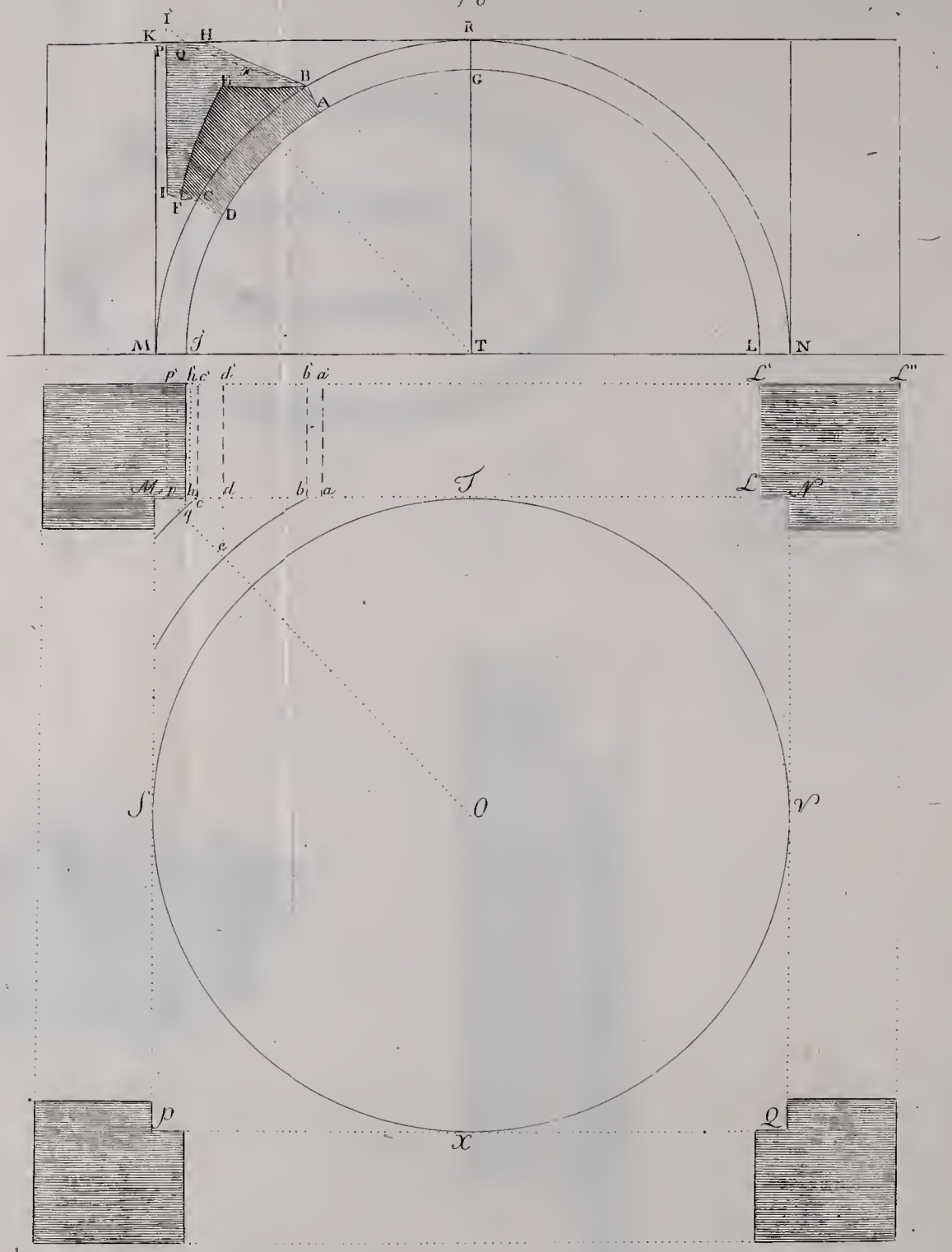
76

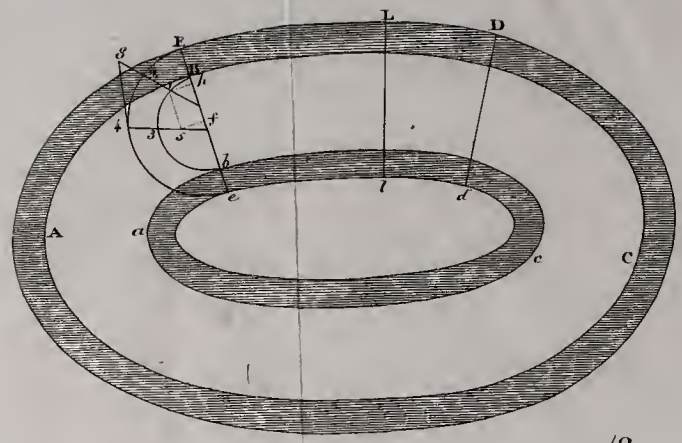

D
Q
L
K
C
H
E
I
M
N
O
F
R
A
G
B


c
g

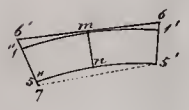
77

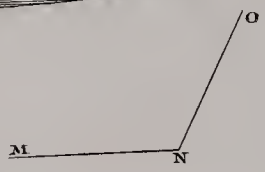

A
B
C
D
E
K
Z
X
G
Y
S
T
O
Q
P
V
N
M
H

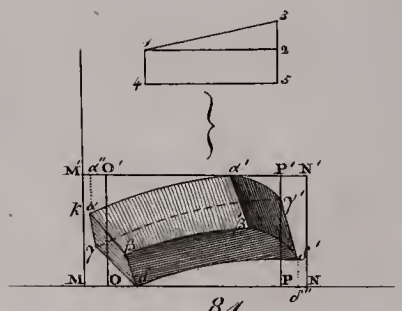

K
I
H
R
P
Q
x
B
A
G
E
C
F
D
M
S
T
L
N
p
h
c
d
b
a
L'
L''
M
n
q
e
S
O
V
p
X
Q


L
D
F
g
h
f
s
b
e
l
d
A
a
c
C

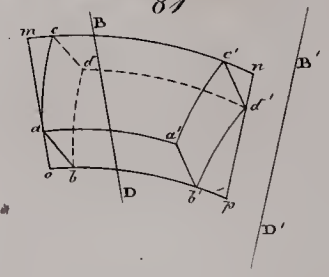
79

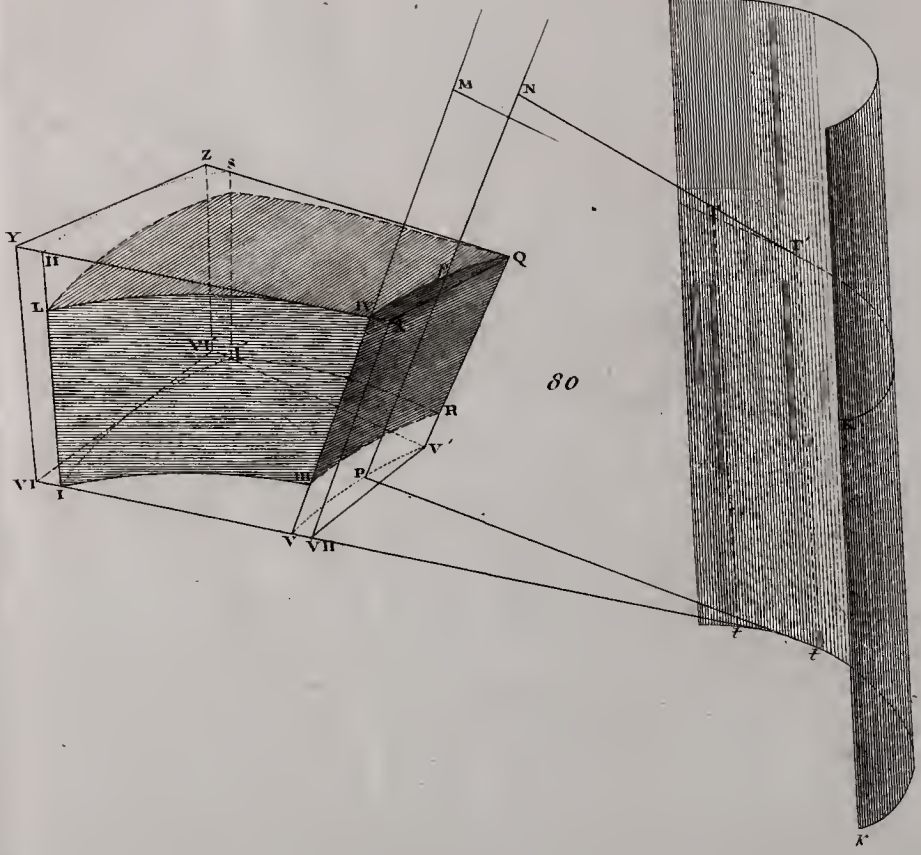



O
M
N


M
O
P
N

81


B
B'
D
D'


M
N
Z
s
Y
II
L
Q
IV
X
VII
R
V'
VI
I
III
P
V
VII
T
T'
K

80

2623-640